Sveučilište u Zagrebu

ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI
DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

Ana Barbir

POOPĆENJA I PROFINJENJA NEJEDNAKOSTI OPIALOVA TIPA

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2016.

Sveučilište u Zagrebu

ZAJEDNIČKI SVEUČILIŠNI POSLIJEDIPLOMSKI
DOKTORSKI STUDIJ MATEMATIKE

ANA BARBIR

POOPĆENJA I PROFINJENJA NEJEDNAKOSTI OPIALOVA TIPA

DOKTORSKI RAD

Mentor:
doc. dr. sc. Kristina Krulić Himmelreich

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

CROATIAN DOCTORAL PROGRAM IN MATHEMATICS

Ana Barbir

GENERALIZATIONS AND REFINEMENTS OF OPIAL TYPE INEQUALITIES

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2016.

Sveučilište u Zagrebu
Zajednički sveučilišni poslijediplomski
doktorski studij matematike

Ana Barbir

Poopćenja i profinjenja nejednakosti Opialova tipa

Doktorska disertacija

Voditelj: doc. dr. sc. Kristina Krulić Himmelreich

Zagreb, 2016.

Ova disertacija je predana na ocjenu Prirodoslovno-matematičkom fakultetu - Matematičkom odsjeku Sveučilišta u Zagrebu u svrhu stjecanja znanstvenog stupnja doktora prirodnih znanosti iz područja matematike.

Hvala mojoj voditeljici doc. dr. sc. Kristini Krulić Himmelreich na iznimnoj pomoći, pruženoj motivaciji i podršci, na ugodnoj suradnji te na znanju i iskustvu koje nesebično prenosi.

Veliku zahvalnost za nastanak ove disertacije izražavam akademiku Josipu Pečariću, njenom idejnom začetniku. Također hvala na pruženoj prilici i stvorenom poticajnom radnom okruženju.

Hvala doc. dr. sc. Maji Andrić i profesoru Ghulamu Faridu, kao i ostalim koautorima, na značajnom doprinosu u ostarivanju iznesenih rezultata.

Hvala svim članovima splitskog i zagrebačkog Seminara za nejednakosti i primjene na korisnim primjedbama i savjetima koje su pridonijele kvaliteti ove disertacije.

Sadržaj

Uvod **iv**

1. Nejednakosti Godunova-Levin-Rozanovina tipa **1**
1.1. Od Opialove do nejednakosti Rozanove 1
1.2. Poopćenja Opialova tipa nejednakosti Rozanove i Godunova-Levinove nejednakosti 3
1.2.1. Teoremi srednje vrijednosti 8
1.2.2. Eksponencijalna konveksnost 12
1.2.3. Sredine Stolarskyjevog tipa 17
1.3. Rezultati za funkcije više varijabli 25

2. Nejednakosti Opialova tipa povezane s Mitrinović-Pečarićevim nejednakostima **32**
2.1. Proširenje prve Mitrinović-Pečarićeve nejednakosti 32
2.1.1. Nejednakosti s razlomljenim integralima i derivacijama 35
2.2. Nejednakosti Opialova tipa za relativno konveksne funkcije 48
2.2.1. Primjena na razlomljene integrale i razlomljene derivacije . . . 51
2.3. Svojstva funkcionala izvedenih iz nejednakosti Mitrinović-Pečarićevog tipa 60

3. Opći oblik nejednakosti Opialova tipa **74**
3.1. Rezultati s težinskom fukcijom 75
3.2. Opća Opialova nejednakost za kvocijent funkcija 84

Literatura **89**

Sažetak **92**

Summary **93**

Životopis **94**

Uvod

Predmet ovog istraživanja su nejednakosti Opialova tipa. Pod time podrazumijevamo nejednakosti koje uključuju integral neke funkcije i njene derivacije. Originalna Opialova nejednakost [34], objavljena je 1960. i iako nije prva nejednakost koja uključuje integral funkcije i njene derivacije, smatra se značajnijom jer daje najbolju moguću konstantu:

Neka je $x \in C^1[0,h]$ takva da je $x(0) = x(h) = 0$ i $x(t) > 0$ za $t \in (0,h)$. Tada vrijedi

$$\int_0^h |x(t)\, x'(t)|\, dt \;\le\; \frac{h}{4} \int_0^h (x'(t))^2\, dt\,,$$

gdje je konstanta $h/4$ najbolja moguća.

Odmah nakon njenog objavljivanja, slijede pojednostavljenja dokaza, poopćenja, proširenja i diskretni analogoni nejednakosti. Najvažnija primjena nejednakosti Opialova tipa je u teoriji diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi. Pregled diferencijalnih nejednakosti Opialova tipa i njihovih primjena u teoriji diferencijalnih jednadžbi dan je u monografiji R. P. Agarwala i P. Y. H. Panga [2].
Cilj rada je poopćiti i profiniti određene nejednakosti Opialova tipa za konveksne i relativno konveksne funkcije, a zatim razmotriti opći oblik nejednakosti Opialova tipa za izmjerive, simetrične funkcije. Neke od dobivenih nejednakosti primjenjujemo na Riemann-Liouvilleove i Hadamardove razlomljene integrale i na tri tipa razlomljenih derivacija: Riemann-Liouvilleove, Canavatijeve i Caputove. Počeci računa s razlomljenim derivacijama i integralima povezuju se s imenima poznatih matematičara kao što su Liouville, Euler, Laplace, Lagrange, Riemann, Weyl i drugi. Danas istraživanja u toj teoriji doživljavaju novi zamah. Od novije literature treba istaknuti monografije [26] i [39]. Pojedini autori su dali profinjenja i poopćenja nekih nejednakosti Opialova tipa, te ih primijenili na razlomljene derivacije i integrale, te dali nove razlomljene diferencijalne nejednakosti. Posebno, radovi [11], [12], [23] i [24] su motivirali ovo istraživanje.
U prvom poglavlju izlažemo nove nejednakosti Opialova tipa za konveksne funkcije od kojih su neke poopćene, neke profinjene nejednakosti Opiala, Willeta, Godunove-Levina te Rozanove. Zatim dobivene nejednakosti dajemo i za više varijabli.
U prvom odjeljku drugog poglavlja dajemo poopćenja Mitrinović-Pečarićeve nejednakosti za konveksne funkcije a u drugom odjeljku za relativno konveksne funkcije. Zatim dajemo primjene na nejednakosti s Riemann-Liouvilleovim razlomljenim integralima te na nejednakosti sa Riemann-Liouvilleovim, Canavatijevim i Caputovim razlomljenim derivacijama.

Na kraju prvog odjeljka prvog poglavlja, te u prvom i trećem odjeljku drugog poglavlja, korištenjem dobivenih nejednakosti Opialova tipa definiramo linearne funkcionale kao razliku lijeve i desne strane nejednakosti. Posebno, samo u trećem odjeljku drugog poglavlja izlažemo svojstva funkcionala izvedenih iz nejednakosti Mitrinović-Pečarićevog tipa. Zatim dajemo teoreme srednje vrijednosti za dobivene funkcionale te proučavamo sredine Stolarskyjevog tipa njima definirane. Potom promatramo n-eksponencijalnu konveksnost, eksponencijalnu konveksnost i log-konveksnost za ove funkcionale. Dajemo nekoliko primjera familija funkcija koje nam omogućuju konstrukciju velikih familija eksponencijalno konveksnih funkcija.
Naposljetku, u trećem poglavlju dajemo opći oblik nejednakosti Opialova tipa za izmjerivu funkciju te kasnije i za kvocijent funkcija. Slijede brojne primjene za simetrične funkcije.
Neki od rezultata iznesenih u ovoj doktorskoj disertaciji objavljeni su u radovima [5], [6], [7], [8], [9] i [14].

Poglavlje 1.

Nejednakosti Godunova-Levin-Rozanovina tipa

U ovom poglavlju izložit ćemo nove nejednakosti Opialova tipa za konveksne funkcije koje poopćavaju nejednakosti Opiala, Willetta, Godunove-Levina te Rozanove. Uz svaku pojedinu nejednakost prirodno se veže linearni funkcional čija svojstava proučavamo i pomoću kojega definiramo nove sredine Stolarskyjevog tipa.
Rezultati izloženi u ovom poglavlju objavljeni su u radovima [6] i [8].

1.1. Od Opialove do nejednakosti Rozanove

U ovom potpoglavlju dajemo pregled poznatih nejednakosti Opialova tipa.

Godine 1960. godine Z. Opial je u [34] objavio sljedeću nejednakost integralnog oblika u kojoj se kao podintegralna funkcija javljaju funkcija i njena prva derivacija.

Teorem 1.1.1. (Opialova nejednakost) *Neka je* $x \in C^1[0,h]$ *takva da je* $x(0) = x(h) = 0$ *i* $x(t) > 0$ *za* $t \in (0,h)$. *Tada vrijedi*

$$\int_0^h |x(t)\, x'(t)|\, dt \ \leq\ \frac{h}{4} \int_0^h (x'(t))^2\, dt\,, \tag{1.1}$$

gdje je konstanta $\dfrac{h}{4}$ *najbolja moguća.*

Iako nije prva nejednakost tog tipa, te se može dobiti iz nejednakosti Wirtingerova i Hardyjeva tipa, smatra se vrlo značajnom, jer daje najbolju moguću konstantu. Naime, za funkciju x definiranu s

$$x(t) \ = \begin{cases} ct\ , & 0 \leq t \leq \frac{h}{2}, \\ c(h-t)\ , & \frac{h}{2} \leq t \leq h\,, \end{cases}$$

gdje je $c > 0$ proizvoljna konstanta vrijedi (1.1). Iako ova funkcija nije derivabilna u točki $t = \dfrac{h}{2}$ možemo je aproksimirati funkcijom klase $C^1[0,h]$ za koju vrijedi (1.1).

Stoga je konstanta $\frac{h}{4}$ najbolja moguća.
Odmah nakon objavljivanja Opialove nejednakosti slijede pojednostavljenja dokaza, poopćenja, proširenja i diskretne verzije. Postoji cijeli niz nejednakosti koje sadrže integrale funkcije i njezine derivacije te ih nazivamo nejednakostima Opialova tipa. Njihova najvažnija primjena je u teoriji diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi. Pregled diferencijalnih nejednakosti Opialova tipa i njihovih primjena u teoriji diferencijalnih jednadžbi dan je u monografiji R. P. Agarwala i P. Y. H. Panga [2].

C. Olech je iste godine iznio jednostavniji dokaz u [33] te je dokazao da nejednakost vrijedi za apsolutno neprekidnu funkciju x, tj. za $x \in AC[0,h]$ bez uvjeta na rast funkcije. R. Beesack je dao još jednostavniji dokaz Opialove nejednakosti u [16], dvije godine nakon njenog objavljivanja. Primijetio je da nejednakost vrijedi čak i ako funkcija x ima prekid u točki $t = \frac{h}{2}$, ali uz uvjet da je apsolutno neprekidna na oba podintervala $\left[0, \frac{h}{2}\right]$ i $\left[\frac{h}{2}, h\right]$. Dodatno, zaključio je da je i uvjet pozitivnosti funkcije x nepotreban.

Teorem 1.1.2. (Beesackova nejednakost) *Neka je $x \in AC[0,h]$, takva da je $x(0) = 0$. Tada vrijedi*

$$\int_0^h |x(t)\, x'(t)|\, dt \;\le\; \frac{h}{2} \int_0^h (x'(t))^2\, dt\,. \tag{1.2}$$

Jednakost vrijedi u (1.2) *ako i samo ako je $x(t) = ct$, gdje je c konstanta.*

Prirodno proširenje Opialove nejednakosti (1.1) dao je D. Willett u [43] 1968.godine. On umjesto prve derivacije funkcije x promatra n-tu derivaciju.

Teorem 1.1.3. (Willettova nejednakost) *Neka je $x \in C^n[0,h]$, takva da je $x^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, \dots, n-1$, $n \ge 1$. Tada je*

$$\int_0^h \left|x(t)\, x^{(n)}(t)\right| dt \;\le\; \frac{h^n}{2} \int_0^h \left(x^{(n)}(t)\right)^2 dt\,. \tag{1.3}$$

Jedno od poopćenja Opialove nejednakosti dali su E. K. Godunova i V. I. Levin u [21].

Teorem 1.1.4. (Godunova-Levinova nejednakost) *Neka je f konveksna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$, $f(0) = 0$ i $x \in AC[\alpha,\tau]$, $x(\alpha) = 0$. Tada vrijedi*

$$\int_\alpha^\tau f'(|x(t)|)\, |x'(t)|\, dt \le f\left(\int_\alpha^\tau |x'(t)|\, dt\right). \tag{1.4}$$

Važna primjena Teorema 1.1.4 dana je sljedećim teoremom.

Teorem 1.1.5. *Neka su f, g konveksne i rastuće funkcije na $[0,\infty)$, $f(0) = 0$. Nadalje, neka je p pozitivna funkcija na $[\alpha,\beta]$ i $\int_\alpha^\beta p(t)dt = 1$, $x \in AC[\alpha,\beta]$, $x(\alpha) = x(\beta) = 0$. Tada vrijedi*

$$\int_\alpha^\beta f'(|x(t)|)\,|x'(t)|dt \;\le\; 2f\left(g^{-1}\left(\int_\alpha^\beta p(t)g\left(\frac{|x'(t)|}{2p(t)}\right)dt\right)\right). \tag{1.5}$$

Sljedeće poopćenje nejednakosti Godunove i Levina dala je G. I. Rozanova 1972. godine u [38].

Teorem 1.1.6. (Nejednakost Rozanove) *Neka su f, g konveksne i rastuće funkcije na $[0,\infty)$, $f(0) = 0$, $p(t) \ge 0$, $p'(t) > 0$, za $t \in [\alpha,\tau]$, $p(\alpha) = 0$. Nadalje, neka je $x \in AC[\alpha,\tau]$ i $x(\alpha) = 0$. Tada vrijedi*

$$\int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t)\,g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right)dt \le f\left(\int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right)dt\right). \tag{1.6}$$

Napomena 1.1.7. U Teoremima 1.1.4, 1.1.5 i 1.1.6 suvišan je uvjet da je funkcija f rastuća. U Teoremima 1.1.5 i 1.1.6 nedostaje uvjet $g \ge 0$.

Napomena 1.1.8. Ako uzmemo da je u Teoremu 1.1.3 $n = 1$, onda Willetova nejednakost (1.3) postaje Opialova nejednakost (1.1). Ako stavimo da je funkcija f u Teoremu 1.1.4 definirana s $f(x) = x^2$ i primjenimo Cauchyjevu nejednakost na desnu stranu Godunova-Levinove nejednakosti (1.4), onda dobivamo Opialovu nejednakost (1.1). Naposljetku, uzmemo li da je u Teoremu 1.1.6 funkcija g definirana s $g(x) = 1$, Rozanovina nejednakost (1.6) postaje Godunova-Levinova nejednakost (1.4).

Izrecimo konačno i Jensenovu nejednakost za konveksne funkcije.

Teorem 1.1.9. (Integralna Jensenova nejednakost) *Neka je $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ prostor konačne mjere i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μ-integrabilna funkcija. Nadalje, neka je funkcija $\varphi : I \to \mathbb{R}$ konveksna, takva da je $Imf \subseteq I$ i $\varphi \circ f$ μ-integrabilna funkcija. Tada je $\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f d\mu \in I$ i vrijedi*

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f d\mu\right) \le \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega (\varphi\circ f)d\mu. \tag{1.7}$$

Ako je φ strogo konveksna funkcija, onda u (1.7) *vrijedi jednakost ako i samo ako je funkcija f konstantna μ-gotovo svuda na Ω. Ako je f konkavna funkcija, onda u* (1.7) *vrijedi suprotna nejednakosti.*

1.2. Poopćenja Opialova tipa nejednakosti Rozanove i Godunova-Levinove nejednakosti

Slijede novi rezultati Opialova tipa u kojima se javljaju n-te derivacije funkcije x te konveksna funkcija f.

Teorem 1.2.1. *Neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$, za koju vrijedi $f(0)=0$. Nadalje, neka je $x\in AC^n[\alpha,\beta]$, takva da je $x^{(i)}(\alpha)=x^{(i)}(\beta)=0$, $i=0,\ldots,n-1$, $n\geq 1$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\int_\alpha^\beta f'(|x(t)|)|x^{(n)}(t)|dt \leq \frac{2(n-1)!}{(\beta-\alpha)^n}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta-\alpha)^n|x^{(n)}(t)|}{2(n-1)!}\right)dt\,. \tag{1.8}$$

Dokaz. Neka je $\alpha<\tau<\beta$. Nadalje, definiramo funkciju y na segmentu $[\alpha,\tau]$ s

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_\alpha^t\int_\alpha^{t_{n-1}}\cdots\int_\alpha^{t_1}|x^{(n)}(s)|\,ds\,dt_1\cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_\alpha^t (t-s)^{n-1}\,|x^{(n)}(s)|\,ds\,,\quad t\in[\alpha,\tau], \end{aligned} \tag{1.9}$$

takvu da vrijedi $y^{(n)}(t)=|x^{(n)}(t)|$ i $y(t)\geq|x(t)|$.
Iz (1.9) je jasno da je za svaki $0\leq i\leq n-1$, $y^{(i)}(t)\geq 0$ i $y^{(i)}$ je rastuća funkcija na $[\alpha,\tau]$.
Stoga, zbog $y^{(i)}(\alpha)=0$, $i=0,\ldots,n-1$, slijedi

$$y(t) \leq \frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n-1)}(t)\,,\quad t\in[\alpha,\tau]\,, \tag{1.10}$$

odnosno

$$y(t) \leq \frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n-1)}(t)\,,\quad t\in[\alpha,\tau]\,. \tag{1.11}$$

Budući da je f' rastuća funkcija, slijedi

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\tau f'(|x(t)|)|x^{(n)}(t)|dt &\leq \int_\alpha^\tau f'(y(t))y^{(n)}(t)dt \\ &\leq \int_\alpha^\tau f'\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(t)\right)y^{(n)}(t)dt \\ &= \frac{(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}}\int_\alpha^\tau \frac{d}{dt}\left[f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(t)\right)\right]dt \\ &= \frac{(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}}f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(\tau)\right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}}f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\int_\alpha^\tau|x^{(n)}(t)|dt\right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Sada promatramo segment $[\tau,\beta]$. Neka je sada

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_t^\beta\int_{t_{n-1}}^\beta\cdots\int_{t_1}^\beta|x^{(n)}(s)|\,ds\,dt_1\cdots dt_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_t^\beta (s-t)^{n-1}\,|x^{(n)}(s)|\,ds\,,\quad t\in[\tau,\beta], \end{aligned} \tag{1.13}$$

takva da vrijedi $y^{(n)}(t)=|x^{(n)}(t)|$ i $y(t)\geq|x(t)|$.
Iz (1.13) je jasno da je za svaki $0\leq i\leq n-1$, $y^{(i)}(t)\geq 0$ i $y^{(i)}$ je rastuća funkcija

na $[\tau, \beta]$.
Sada, zbog $y^{(i)}(\alpha) = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$, slijedi

$$y(t) \;\leq\; \frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\, y^{(n-1)}(t)\,, \quad t \in [\tau, \beta]\,. \tag{1.14}$$

Budući da je f' rastuća funkcija, iz (1.14) slijedi

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^\beta f'(|x(t)|)|x^{(n)}(t)|dt \\
&\leq \int_\tau^\beta f'(y(t))y^{(n)}(t)dt \\
&\leq \int_\tau^\beta f'\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t)\right) y^{(n)}(t)dt \\
&= \frac{(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}} \int_\tau^\beta \frac{d}{dt}\left[f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t)\right)\right] dt \\
&= \frac{(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}} f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(\tau)\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}} f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} \int_\tau^\beta |x^{(n)}(t)|dt\right).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Neka je τ takav da je

$$\int_\alpha^\tau |x^{(n)}(t)|dt = \int_\tau^\beta |x^{(n)}(t)|dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |x^{(n)}(t)|dt. \tag{1.16}$$

Iz (1.12), (1.15), (1.16) i Jensenove nejednakosti (1.7) slijedi

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f'(|x(t)|)|x^{(n)}(t)|dt &\leq \frac{2(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}} f\left(\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{2(n-1)!}\int_\alpha^\beta |x^{(n)}(t)|dt\right) \\
&= \frac{2(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n-1}} f\left(\frac{1}{(\beta-\alpha)}\int_\alpha^\beta \frac{(\beta-\alpha)^n|x^{(n)}(t)|}{2(n-1)!}dt\right) \\
&\leq \frac{2(n-1)!}{(\beta-\alpha)^{n}} \int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta-\alpha)^n|x^{(n)}(t)|}{2(n-1)!}\right) dt,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. □

Napomena 1.2.2. Za $f(x) = x^r$, $r \geq 1$, nejednakost (1.8) postaje

$$\int_\alpha^\beta |x(t)|^{r-1}\,|x^{(n)}(t)|\,dt \;\leq\; \frac{(\beta-\alpha)^{n(r-1)}}{2^{r-1}\, r\, \left((n-1)!\right)^{r-1}} \int_\alpha^\beta |x^{(n)}(t)|^r\,dt\,.$$

Ako koristimo (1.10) umjesto (1.11) nejednakost (1.12) postaje

$$\int_\alpha^\tau f'(|x(t)|)|x^{(n)}(t)|dt \leq \frac{(n-1)!}{(\tau-\alpha)^{n-1}} f\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\int_\alpha^\tau |x^{(n)}(t)|dt\right) \tag{1.17}$$

te ako sada na (1.17) primijenimo Jensenovu nejednakost (1.7) i uzmemo da je $f(x) = x^2$, onda dobijemo

$$\int_\alpha^\tau |x(t)|\,|x^{(n)}(t)|\,dt \;\le\; \frac{(\tau-\alpha)^n}{2\,(n-1)!}\int_\alpha^\tau |x^{(n)}(t)|^2\,dt\,,$$

što je značajno poboljšanje Willetove nejednakosti (1.3) na $[\alpha,\tau]$. Naime, u našem rezultatu se u nazivniku pojavljuje faktor $(n-1)!$ koji za $n > 2$ bitno smanjuje desnu stranu originalne Willettove nejednakosti.
Posebno, za $r = 2$ i $n = 1$, u (1.8) dobijemo

$$\int_\alpha^\beta |x(t)\,x'(t)|\,dt \;\le\; \frac{\beta-\alpha}{4}\int_\alpha^\beta |x'(t)|^2\,dt\,,$$

Opialovu nejednakost (1.1) na $[\alpha,\beta]$.

Za $n = 1$ dobijemo sljedeći korolar, kao posebni slučaj prethodnog teorema.

Korolar 1.2.3. *Neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$, $x \in AC[\alpha,\beta]$, takva da je $x(\alpha) = x(\beta) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\int_\alpha^\beta f'(|x(t)|)|x'(t)|dt \;\le\; \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}\right)dt. \tag{1.18}$$

Ista metoda primijenjena na Teorem 1.1.6 daje sljedeći rezultat.

Teorem 1.2.4. *Neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$, za koju vrijedi $f(0) = 0$. Neka je g konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$, $p'(t) > 0$, $t \in [\alpha,\tau]$, $p(\alpha) = 0$. Nadalje, neka je $x \in AC^n[\alpha,\tau]$, takva da je $x^{(i)}(\alpha) = 0$, $i = 0,\ldots,n-1$, $n \ge 1$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t)\,g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right)dt \\ \le\; \frac{1}{p(\tau)}\int_\alpha^\tau p'(t)\,f\left(p(\tau)\,g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right)\right)dt\,.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Dokaz. Kao u dokazu prethodnog teorema, za $t \in [\alpha,\tau]$ imamo $y^{(n)}(t) = |x^{(n)}(t)|$, $y(t) \ge |x(t)|$ i

$$y(t) \;\le\; \frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\,y^{(n-1)}(t)\,.$$

Budući da je g rastuća, iz Jensenove nejednakosti (1.7) slijedi

$$\begin{aligned} g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right) \;&\le\; g\left(\frac{y(t)}{p(t)}\right) \;\le\; g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{y^{(n-1)}(t)}{p(t)}\right) \\ &=\; g\left(\frac{\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\int_\alpha^t p'(s)\frac{|x^{(n)}(s)|}{p'(s)}\,ds}{\int_\alpha^t p'(s)\,ds}\right) \\ &\le\; \frac{1}{p(t)}\int_\alpha^t p'(s)\,g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{y^{(n)}(s)}{p'(s)}\right)ds\,.\end{aligned}$$

Iz gornje nejednakosti i svojstva rasta funkcije f', dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t)\, g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\
\le\ & \int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y^{(n)}(t)}{p'(t)}\right) f'\left(\int_\alpha^t p'(s)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y^{(n)}(s)}{p'(s)}\right) ds\right) dt \\
=\ & \int_\alpha^\tau \frac{d}{dt}\left[f\left(\int_\alpha^t p'(s)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y^{(n)}(s)}{p'(s)}\right) ds\right)\right] dt \\
=\ & f\left(\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{y^{(n)}(t)}{p'(t)}\right) dt\right) \\
=\ & f\left(\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right). \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Primjenom Jensenove nejednakosti (1.7) na (1.20), dobivamo

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t)\, g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\
\le\ & f\left(\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) \\
=\ & f\left(\frac{p(\tau)}{p(\tau)}\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) \\
=\ & f\left(\frac{1}{p(\tau)}\int_\alpha^\tau p(\tau)p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt\right) \\
=\ & f\left(\frac{\int_\alpha^\tau p(\tau)p'(t)\, g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right) dt}{\int_\alpha^\tau p'(t)dt}\right) \\
\le\ & \frac{1}{p(\tau)}\int_\alpha^\tau p'(t)\, f\left(p(\tau)g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right)\right) dt\,.
\end{aligned}$$

□

Za $n=1$ slijedi sljedeći korolar.

Korolar 1.2.5. *Neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Neka je g konveksna, nenegativna i rastuća na $[0,\infty)$, $p'(t)>0$, $t\in[\alpha,\tau]$, $p(\alpha)=0$. Nadalje, neka je $x\in AC[\alpha,\tau]$, $x(\alpha)=0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^\tau p'(t)\, g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right) f'\left(p(t)\, g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right) dt \\
&\quad\le\ \frac{1}{p(\tau)}\int_\alpha^\tau p'(t)\, f\left(p(\tau)\, g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right)\right) dt\,. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

1.2.1. Teoremi srednje vrijednosti

Motivirani nejednakostima (1.4), (1.18), (1.8), (1.6) i (1.19) dobivamo redom sljedeće funkcionale:

$$\Phi_1(f) = f\left(\int_\alpha^\tau |x'(t)|\,dt\right) - \int_\alpha^\tau f'\left(|x(t)|\right)|x'(t)|\,dt\,, \tag{1.22}$$

gdje je funkcija x kao u Teoremu 1.1.4;

$$\Phi_2(f) = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}\right)dt - \int_\alpha^\beta f'(|x(t)|)|x'(t)|dt, \tag{1.23}$$

gdje je funkcija x kao u Korolaru 1.2.3;

$$\begin{aligned}\Phi_3(f) &= \frac{2(n-1)!}{(\beta-\alpha)^n}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta-\alpha)^n|x^{(n)}(t)|}{2(n-1)!}\right)dt \\ &- \int_\alpha^\beta f'(|x(t)|)|x^{(n)}(t)dt|\,,\end{aligned} \tag{1.24}$$

gdje je funkcija x kao u Teoremu 1.2.1;

$$\begin{aligned}\Phi_4(f) &= f\left(\int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right)dt\right) \\ &- \int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right)f'\left(p(t)\,g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right)dt\,,\end{aligned} \tag{1.25}$$

gdje su funkcije g, p i x kao u Teoremu 1.1.6;

$$\begin{aligned}\Phi_5(f) &= \frac{1}{p(\tau)}\int_\alpha^\tau f\left(p(\tau)\,g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right)\right)p'(t)\,dt \\ &- \int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{(\tau-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{|x^{(n)}(t)|}{p'(t)}\right)f'\left(p(t)\,g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right)\right)dt\,,\end{aligned} \tag{1.26}$$

gdje su funkcije g, p i x kao u Teoremu 1.2.4 (i u svim funkcionalima je f diferencijabilna funkcija za koju vrijedi $f(0) = 0$).
Ako je f konveksna funkcija, onda iz Teorema 1.1.4, 1.2.1, 1.1.6, 1.2.4 te Korolara 1.2.3, slijedi

$$\Phi_i(f) \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Sada ćemo dati teoreme srednje vrijednosti za funkcionale Φ_i, $i = 1, \dots, 5$.
Prvo promotrimo funkcional Φ_1. Neka je $0 \leq |x'| \leq M$. Slijedi

$$0 \leq \int_\alpha^\tau |x'(t)|dt \leq M(\tau-\alpha)$$

i

$$0 \leq |x(t)| \leq \int_\alpha^t |x'(s)|ds \leq M(t-\alpha) \leq M(\tau-\alpha).$$

Dakle, za funkcional Φ_1 neka je $f : I_1 \to \mathbb{R}$ gdje je

$$I_1 = [0, M(\tau - \alpha)]. \tag{1.27}$$

Analogno, sa $|x(t)| \leq M\,(\tau - \alpha)$ i $|x(t)| \leq M\,(\beta - \tau)$, za funkcional Φ_2 slijedi

$$I_2 = \left[0, \frac{M(\beta - \alpha)}{2}\right], \tag{1.28}$$

dok za Φ_3 i $0 \leq |x^{(n)}| \leq M$ imamo

$$\frac{(\beta - \alpha)^n\,|x^{(n)}(t)|}{2(n-1)!} \leq \frac{M\,(\beta - \alpha)^n}{2(n-1)!}$$

i

$$|x(t)| \leq \frac{1}{(n-1)!}\int_\alpha^t (t-s)^{n-1}|x^{(n)}(s)|\,ds \leq \frac{M\,(t-\alpha)^n}{n!} \leq \frac{M\,(\tau - \alpha)^n}{n!}$$

iz čega dobivamo

$$I_3 = \left[0, \frac{M\,(\beta - \alpha)^n}{2\,n!}\right]. \tag{1.29}$$

Nadalje, za funkcional Φ_4 neka je $0 < m \leq p' \leq M_1$, $0 \leq |x'| \leq M$ i $g \geq 0$. Tada je $0 \leq \dfrac{|x'|}{p'} \leq \dfrac{M}{m}$. Slijedi

$$m\,(\tau - \alpha)\min_{\left[0, \frac{M}{m}\right]} g \leq \int_\alpha^\tau p'(t)\,g\left(\frac{|x'(t)|}{p'(t)}\right)dt \leq M_1\,(\tau - \alpha)\max_{\left[0, \frac{M}{m}\right]} g\,.$$

Također je

$$0 \leq \frac{|x(t)|}{p(t)} \leq \frac{\int_\alpha^t |x'(s)|\,ds}{\int_\alpha^t p'(s)\,ds} \leq \frac{M}{m}\,.$$

Očito je $p(t) \leq M_1\,(\tau - \alpha)$, dobivamo

$$0 \leq p(t)\,g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right) \leq M_1\,(\tau - \alpha)\max_{\left[0, \frac{M}{m}\right]} g\,.$$

Dakle, za funkcional Φ_4 imamo

$$I_4 = \left[0, M_1\,(\tau - \alpha)\max_{\left[0, \frac{M}{m}\right]} g\right]. \tag{1.30}$$

Konačno, za funkcional Φ_5 i $0 \leq \left|x^{(n)}\right| \leq M$

$$p(\tau)\,g\left(\frac{(\tau - \alpha)^{n-1}\,|x^{(n)}(t)|}{(n-1)!\,p'(t)}\right) \leq M_1\,(\tau - \alpha)\max_{\left[0, \frac{M\,(\tau-\alpha)^{n-1}}{m\,(n-1)!}\right]} g\,.$$

Također je

$$0 \leq \frac{|x(t)|}{p(t)} \leq \frac{M\,(\tau - \alpha)^{n-1}}{m\,n!}$$

i

$$0 \leq p(t)\, g\left(\frac{|x(t)|}{p(t)}\right) \leq M_1\,(\tau-\alpha) \max_{\left[0, \frac{M\,(\tau-\alpha)^{n-1}}{m\,n!}\right]} g\,,$$

iz čega slijedi

$$I_5 = \left[0, M_1\,(\tau-\alpha) \max_{\left[0, \frac{M(\tau-\alpha)^{n-1}}{m\,n!}\right]} g\right]. \tag{1.31}$$

Definiramo sljedeće uvjete:

$(A1)$ Neka je $x \in AC\,[\alpha,\tau]$, $x(\alpha)=0$ i $0 \leq |x'| \leq M$.

$(A2)$ Neka je $x \in AC\,[\alpha,\beta]$, $x(\alpha)=x(\beta)=0$ i $0 \leq |x'| \leq M$.

$(A3)$ Neka je $x \in AC^n\,[\alpha,\beta]$, $x^{(i)}(\alpha)=x^{(i)}(\beta)=0$ za $i=0,...,n-1$ $(n \geq 1)$ i $0 \leq |x^{(n)}| \leq M$.

$(A4)$ Neka je g konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$, $p(t) \geq 0$, $t \in [\alpha,\tau]$, $p(\alpha)=0$ i $0 < m \leq p' \leq M_1$. Nadalje, neka je $x \in AC[\alpha,\tau]$, $x(\alpha)=0$ i $0 \leq |x'| \leq M$.

$(A5)$ Neka je g konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$, $p(t) \geq 0$, $t \in [\alpha,\tau]$, $p(\alpha)=0$ i $0 < m \leq p' \leq M_1$. Nadalje, neka je $x \in AC^n[\alpha,\tau]$, $x^{(i)}(\alpha)=0$ za $i=0,\dots,n-1$, $(n \geq 1)$ i $0 \leq \left|x^{(n)}\right| \leq M$.

Teorem 1.2.6. *Neka je $i \in \{1,\dots,5\}$ i neka je Φ_i funkcional dan s odgovarajućom definicijom iz niza* (1.22)-(1.26) *uz uvjet (Ai). Nadalje, neka je $f \in C^2[I_i]$ funkcija za koju vrijedi $f(0)=0$. Tada postoji $\xi_i \in I_i$ takav da je*

$$\Phi_i(f) = \frac{f''(\xi_i)}{2}\Phi_i(f_0)\,, \tag{1.32}$$

gdje je $f_0(t)=t^2$.

Dokaz. Budući da je $f \in C^2[I_i]$, postoje realni brojevi $d = \min_{t\in I_i} f''(t)$ i $D = \max_{t\in I_i} f''(t)$. Lako se pokaže da su funkcije f_1 i f_2 definirane sa

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{D}{2}t^2 - f(t),\\ f_2(t) &= f(t) - \frac{d}{2}t^2 \end{aligned}$$

konveksne. Dakle, vrijedi $\Phi_i(f_1) \geq 0$, $\Phi_i(f_2) \geq 0$, i dobijemo

$$\Phi_i(f) \leq \frac{D}{2}\Phi_i(f_0)\,, \tag{1.33}$$

$$\Phi_i(f) \geq \frac{d}{2}\Phi_i(f_0)\,. \tag{1.34}$$

Iz (1.33) i (1.34) imamo

$$\frac{d}{2}\Phi_i(f_0) \;\leq\; \Phi_i(f) \;\leq\; \frac{D}{2}\Phi_i(f_0)\,.$$

Ako je $\Phi_i(f_0) = 0$ tvrdnja je trivijalno ispunjena. Stoga možemo pretpostaviti da je $\Phi_i(f_0) > 0$. Tada je

$$d \leq \frac{2\Phi_i(f)}{\Phi_i(f_0)} \leq D\,,$$

pa prema Bolzano-Weiestrassovom teoremu postoji $\xi_i \in I_i$ takav da je

$$\Phi_i(f) = \frac{f''(\xi_i)}{2}\Phi_i(f_0)\,.$$

□

Teorem 1.2.6 je teorem srednje vrijednosti Langrangeovog tipa. U sljedećem teoremu dokazujemo tvrdnju Cauchyjevog tipa.

Teorem 1.2.7. *Neka je $i \in \{1, \ldots, 5\}$ i neka je Φ_i funkcional dan s odgovarajućom definicijom iz niza* (1.22) - (1.26) *uz uvjet* (Ai). *Nadalje, neka su $f, g \in C^2[I_i]$ sa $f(0) = g(0) = 0$. Tada postoji $\xi_i \in I_i$ takav da je*

$$\frac{\Phi_i(f)}{\Phi_i(g)} = \frac{f''(\xi_i)}{g''(\xi_i)}\,, \tag{1.35}$$

uz pretpostavku da oba nazivnika nisu 0.

Dokaz. Definirajmo funkciju $h \in C^2[I_i]$ sa $h = c_1 f - c_2 g$, gdje je

$$c_1 = \Phi_i(g)\,,\;\; c_2 = \Phi_i(f)\,.$$

Sada primjenom Teorema 1.2.6 postoji $\xi_i \in I_i$ takav da je

$$\left(c_1\frac{f''(\xi_i)}{2} - c_2\frac{g''(\xi_i)}{2}\right)\Phi_i(f_0) = 0\,.$$

Budući da je f_0 konveksna, vrijedi da je $\Phi_i(f_0) \geq 0$. Ako je $\Phi_i(f_0) = 0$, onda je $\Phi_i(g) = 0$ što je kao slučaj isključeno iz Teorema. Dakle, promatramo samo slučaj kad je $\Phi_i(f_0) > 0$. No, tada je

$$\frac{\Phi_i(f)}{\Phi_i(g)} = \frac{f''(\xi_i)}{g''(\xi_i)}\,.$$

□

Kao neposrednu posljedicu Teorem 1.2.6 dobivamo profinjenja nejednakosti Opialova tipa danih sa (1.4), (1.6), (1.8), (1.18), (1.19) i (1.21) .
Pokažimo to na primjeru funkcionala Φ_2.

Neka je kao u dokazu Teorema 1.2.6, $d = \min f''(t)$, $D = \max f''(t)$. Ako je f konveksna funkcija, onda je $D \geq 0$. Tada je

$$\frac{D}{2}\Phi_2(f_0) \geq \Phi_2(f).$$

Budući da je

$$\frac{1}{2}\Phi_2(f_0) = \frac{\beta-\alpha}{4}\int_\alpha^\beta (x'(t))^2 dt - \int_\alpha^\beta |x(t)x'(t)|dt.$$

Za konveksnu funkciju f, takvu da je $D > 0$, $f(0) = 0$, imamo profinjenje osnovne Opialove nejednakosti, tj. vrijedi

$$\frac{\beta-\alpha}{4}\int_\alpha^\beta (x'(t))^2 dt \geq \int_\alpha^\beta |x(t)x'(t)|dt + \frac{1}{D}\Phi_2(f) \geq \int_\alpha^\beta |x(t)x'(t)|dt.$$

S druge strane, iz nejednakosti

$$\Phi_2(f) \geq \frac{d}{2}\Phi_2(f_0)$$

i konveksnosti funkcije f_0 slijedi ovaj niz nejednakosti

$$\begin{aligned} \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}\right) \quad &\geq \quad \int_\alpha^\beta f'\left(|x(t)|\right)|x'(t)|dt + \frac{d}{2}\Phi_2(f_0) \\ &\geq \quad \int_\alpha^\beta f'\left(|x(t)|\right)|x'(t)|dt, \end{aligned}$$

što je profinjenje nejednakosti (1.18).
Slična se profinjenja mogu napraviti i za ostale nejednakosti koje su povezane s funkcionalima Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$.

1.2.2. Eksponencijalna konveksnost

Elegantna metoda kojom se dobivaju n-eksponencijalno konveksne i eksponencijalno konveksne funkcije dana je u [25] (pogledati i [13]). Koristit ćemo je za dokazivanje n-eksponencijalne konveksnosti funkcija pridruženih funkcionalima Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$. Navedimo neke definicije i osnovna svojstva koja ćemo koristiti. Neke od njih se mogu naći i u [17].
U nastavku neka je I otvoreni interval u $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2.8. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je eksponencijalno konveksna na I ako je neprekidna i ako je*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j f(x_i + x_j) \geq 0$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i za svaki izbor $\xi_i, x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ takav da je $x_i + x_j \in I$, $1 \leq i, j \leq n$.

Trebat će nam sljedeći rezultati o konveksnim funkcijama (vidjeti npr. [36]).

Propozicija 1.2.9. *Ako su $x_1, x_2, x_3 \in I$ takvi da je $x_1 < x_2 < x_3$, onda je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna ako i samo ako vrijedi nejednakost*

$$(x_3 - x_2)\, f(x_1) + (x_1 - x_3)\, f(x_2) + (x_2 - x_1)\, f(x_3) \ \geq \ 0.$$

Propozicija 1.2.10. *Ako je f konveksna funkcija na intervalu I i ako je $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, onda vrijedi sljedeća nejednakost*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ \leq \ \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}\,. \tag{1.36}$$

Ako je funkcija f konkavna, onda u (1.36) *vrijedi suprotna nejednakost.*

Definirajmo i podijeljene razlike, koje se često koriste kad funkcije imaju različite stupnjeve glatkoće.

Definicija 1.2.11. *Podijeljena razlika drugog reda funkcije $f\colon I \to \mathbb{R}$ u međusobno različitim točkama $y_0, y_1, y_2 \in I$ je rekurzivno definirana sa*

$$\begin{aligned}
[y_i; f] &= f(y_i)\,, \quad i = 0, 1, 2 \\
[y_i, y_{i+1}; f] &= \frac{f(y_{i+1}) - f(y_i)}{y_{i+1} - y_i}\,, \quad i = 0, 1 \\
[y_0, y_1, y_2; f] &= \frac{[y_1, y_2; f] - [y_0, y_1; f]}{y_2 - y_0}\,.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Napomena 1.2.12. Vrijednost $[y_0, y_1, y_2; f]$ ne ovisi o poretku točaka y_0, y_1 i y_2. Za dva puta diferencijabilnu funkciju definicija se može proširiti tako da uključuje slučaj kada se točke podudaraju. Naime, uzmemo limes $y_1 \to y_0$ u (1.37) te dobijemo

$$\lim_{y_1 \to y_0} [y_0, y_1, y_2; f] = [y_0, y_0, y_2; f] = \frac{f(y_2) - f(y_0) - f'(y_0)(y_2 - y_0)}{(y_2 - y_0)^2}\,,\ y_2 \neq y_0$$

i uzimajući limes $y_i \to y_0$, $i = 1, 2$ u (1.37), dobivamo

$$\lim_{y_2 \to y_0} \lim_{y_1 \to y_0} [y_0, y_1, y_2; f] = [y_0, y_0, y_0; f] = \frac{f''(y_0)}{2}.$$

U kasnijim primjenama koristit ćemo sljedeću propoziciju i njene korolare.

Propozicija 1.2.13. *Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.*

(*i*) *Funkcija f je eksponencijalno konveksna.*

(*ii*) *Funkcija f je neprekidna i*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i\, \xi_j\, f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \geq 0, \tag{1.38}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, za sve $\xi_i, \xi_j \in \mathbb{R}$ i svaki izbor $x_i, x_j \in I$, za $1 \leq i, j \leq n$.

Napomena 1.2.14. Za $n = 1$ iz (1.38) slijedi da je eksponencijalno konveksna funkcija nenegativna, tj. $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in I$. Nadalje, množenje eksponencijalno konveksne funkcije pozitivnim brojem te zbroj eksponencijalno konveksnih funkcija (na istoj domeni) je eksponencijalno konveksna funkcija.

Korolar 1.2.15. *Ako je f eksponencijalno konveksna na intervalu I, onda je matrica $\left[f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)\right]_{i,j=1}^{n}$ pozitivno semidefinitna. Posebno, $\det\left[f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right)\right]_{i,j=1}^{n} \geq 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$.*

Korolar 1.2.16. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ eksponencijalno konveksna funkcija, onda je f ujedno i konveksna funkcija na I.*

Sad uvodimo pojam n-eksponencijalne konveksnosti.
Rezultati od Definicije 1.2.17 do Napomene 1.2.20 i drugi detalji o n-eksponencijalno konveksnim funkcijama mogu se naći u članku [35].

Definicija 1.2.17. *Funkcija $f \colon I \to \mathbb{R}$ je n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na I ako vrijedi*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \, \xi_j \, f\left(\frac{x_i + x_j}{2}\right) \geq 0$$

za svaki izbor $\xi_i \in \mathbb{R}$ i svaki izbor $x_i \in I$, $i = 1, \ldots, n$.
Funkcija $f \colon I \to \mathbb{R}$ je n-eksponencijalno konveksna ako je n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu i neprekidna na I.

Propozicija 1.2.18. *Funkcija $f \colon I \to \mathbb{R}$ je eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na I ako je n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu za svaki $n \in \mathbb{N}$.*
Funkcija $f \colon I \to \mathbb{R}$ je eksponencijalno konveksna ako je eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu i neprekidna.

Napomena 1.2.19. Iz definicije je jasno da su 1-eksponencijalno konveksne funkcije u Jensenovom smislu nenegativne funkcije. Također, n-eksponencijalno konveksne funkcije u Jensenovom smislu su k-eksponencijalno konveksne u Jensenovom smislu za $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$.

Napomena 1.2.20. Funkcija $f : I \to (0, \infty)$ je log-konveksna u Jensenovom smislu ako i samo ako vrijedi

$$\alpha^2 f(x) + 2\alpha\beta f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \beta^2 f(y) \geq 0$$

za svaki izbor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i svaki izbor $x, y \in I$. Slijedi da je pozitivna funkcija log-konveksna u Jensenovom smislu ako i samo ako je 2-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu.
Također, korištenjem osnovne teorije konveksnosti zaključi se da je pozitivna funkcija log-konveksna ako i samo ako je 2-eksponencijalno konveksna.

Nakon ovih poznatih rezultata o n-eksponencijalno konveksnim funkcijama iskažimo novi rezultat u kojem razmatramo svojstva funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ gdje su Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$ linearni funkcionali definirani u prethodnom tekstu.

Teorem 1.2.21. *Neka je $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Neka su Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$ linearni funkcionali definirani s* (1.22)-(1.26).
Tada je $s \mapsto \Phi_i(f_s)$ n-eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako su još funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ neprekidne na J, onda su n-eksponencijalno konveksne funkcije na J.

Dokaz. Za $\xi_i \in \mathbb{R}$, $s_i \in J$, $i = 1, \ldots, n$, definiramo funkciju

$$h(y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j f_{\frac{s_i+s_j}{2}}(y) .$$

Korištenjem pretpostavke da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, imamo

$$[y_0, y_1, y_2; h] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j [y_0, y_1, y_2; f_{\frac{s_i+s_j}{2}}] \geq 0 ,$$

iz čega slijedi da je h konveksna funkcija na I. Vrijedi $\Phi_i(h) \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$. Dakle,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j \Phi_i(f_{\frac{s_i+s_j}{2}}) \geq 0 .$$

Zaključujemo da su funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ n-eksponencijalno konveksne na J u Jensenovom smislu. Ako su funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ dodatno i neprekidne na J, onda su n-eksponencijalno konveksne funkcije po definiciji.

□

Korolar 1.2.22. *Neka je $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Neka su Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$ linearni funkcionali definirani s* (1.22)-(1.26). *Tada su $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ eksponencijalno konveksne funkcije u Jensenovom smislu na J. Ako su još funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ neprekidne na J, onda su eksponencijalno konveksne funkcije na J.*

Teorem 1.2.23. *Neka je $\Omega = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ is 2-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Neka su Φ_i, $i = 1, ..., 5$ linearni funkcionali definirani s* (1.22)-(1.26). *Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) *Ako su funkcije* $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, ..., 5$ *neprekidne na* J, *onda su* 2- *eksponencijalno konveksne funkcije na* J. *Ako su funkcije* $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, ..., 5$ *pozitivne, onda su također log-konveksne na* J. *Tada za* $r, s, t \in J$ *takve da je* $r < s < t$ *vrijedi*

$$(\Phi_i(f_s))^{t-r} \leq (\Phi_i(f_r))^{t-s} (\Phi_i(f_t))^{s-r} \ , \ i = 1, ..., 5 \, . \tag{1.39}$$

(ii) *Ako su funkcije* $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, ..., 5$ *pozitivne i diferencijabilne na* J, *onda za svaki izbor* $s, q, r, t \in J$, *takve da je* $s \leq r$ *i* $q \leq t$ *vrijedi*

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \ \leq \ \mu_{r,t}(\Phi_i, \Omega) \, , \ i = 1, ..., 5 \, , \tag{1.40}$$

gdje je

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)} \right)^{\frac{1}{s-q}} & , \ s \neq q \, , \\ \exp\left(\dfrac{\frac{d}{ds}\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_s)} \right) & , \ s = q \, . \end{cases} \tag{1.41}$$

Štoviše, ako su $u, u_1, ..., u_l, u + u_1, ..., u + u_l, u + u_1 + ... + u_l \in J$, *onda vrijedi*

$$\Phi_i(f_u)^{n-1} \Phi_i(f_{u+u_1+...+u_l}) \geq \Phi_i(f_{u+u_1}) \cdot ... \cdot \Phi_i(f_{u+u_l}). \tag{1.42}$$

Posebno, ako je $0 \in J$, *onda imamo nejednakost Čebiševljevog tipa*

$$\Phi_i(f_0)^{n-1} \Phi_i(f_{u_1+...+u_l}) \geq \Phi_i(f_{u_l}) \cdot ... \cdot \Phi_i(f_{u_l}).$$

Dokaz. (i) Prvi dio je direktna posljedica Teorema 1.2.21, a u drugom dijelu log-konveksnost na J slijedi iz Napomene 1.2.20. Budući da su funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ pozitivne, za $r, s, t \in J$ takve da je $r < s < t$, sa $f(s) = \ln \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ primjenom Propozicije 1.2.9, imamo

$$(t - s) \ln \Phi_i(f_r) + (r - t) \ln \Phi_i(f_s) + (s - r) \ln \Phi_i(f_t) \ \geq \ 0 \, ,$$

što je ekvivalentno (1.39).
(ii) Funkcije $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ su *log*-konveksne na J po (i), odnosno, funkcije $s \mapsto \ln \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ su konveksne na J. Primjenom Propozicije 1.2.10 dobivamo

$$\frac{\ln \Phi_i(f_s) - \ln \Phi_i(f_q)}{s - q} \ \leq \ \frac{\ln \Phi_i(f_r) - \ln \Phi_i(f_t)}{r - t}, \quad i = 1, \ldots, 5 \tag{1.43}$$

za $s \leq r$, $q \leq t$, $s \neq q$, $r \neq t$, što je ekvivalentno

$$\left(\frac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)} \right)^{\frac{1}{s-q}} \leq \left(\frac{\Phi_i(f_r)}{\Phi_i(f_t)} \right)^{\frac{1}{r-t}} \tag{1.44}$$

stoga imamo

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \ \leq \ \mu_{r,t}(\Phi_i, \Omega) \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Neka je sada $s = q$. Tada u (1.43) imamo granični slučaj

$$\lim_{s\to q} \frac{\ln \Phi_i(f_s) - \ln \Phi_i(f_q)}{s-q} \leq \frac{\ln \Phi_i(f_r) - \ln \Phi_i(f_t)}{r-t}, \quad i = 1, \ldots, 5 \tag{1.45}$$

S lijeve strane nejednakosti (1.45), obzirom da imamo slučaj $\frac{0}{0}$, limes možemo računati korištenjem L'Hospitalovog pravila. Slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to q} \frac{\frac{1}{\Phi_i(f_s)}\frac{d}{ds}\Phi_i(f_s)}{1} &\leq \frac{\ln \frac{\Phi_i(f_r)}{\Phi_i(f_t)}}{r-t} \\
\frac{\frac{d}{ds}\Phi_i(f_q)}{\Phi_i(f_q)} &\leq \left(\ln \frac{\Phi_i(f_r)}{\Phi_i(f_t)}\right)^{r-t} \\
\exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\Phi_i(f_q)}{\Phi_i(f_q)}\right) &\leq \left(\frac{\Phi_i(f_r)}{\Phi_i(f_t)}\right)^{r-t} \\
\mu_{q,q}(\Phi_i, \Omega) &\leq \mu_{r,t}(\Phi_i, \Omega) \quad i = 1, \ldots, 5.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Neka je $r = t$. Tada također imamo granični slučaj u (1.43). Dokaz provodimo slično kao za $s = q$ samo je sada limes s desne strane nejednakosti. Dobivamo nejednakost

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega) \leq \mu_{t,t}(\Phi_i, \Omega) \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Naposljetku, ako u (1.44) stavimo $q = t = u$, $s = u + u_1 + ... + u_l$, $r = u + u_i$, onda dobijemo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Phi_i(f_{u+u_1+\ldots+u_l})}{\Phi_i(f_u)}\right)^{\frac{1}{u_1+\ldots+u_l}} &\geq \left(\frac{\Phi_i(f_{u+u_i})}{\Phi_i(f_u)}\right)^{\frac{1}{u_i}} \\
\left(\frac{\Phi_i(f_{u+u_1+\ldots+u_l})}{\Phi_i(f_u)}\right)^{\frac{u_i}{u_1+\ldots+u_l}} &\geq \frac{\Phi_i(f_{u+u_i})}{\Phi_i(f_u)}
\end{aligned}$$

Množenjem svih nejednakosti za $i = 1, \ldots, l$ dobivamo (1.42). □

Napomena 1.2.24. Rezultati iz Teorema 1.2.21, Korolara 1.2.22 i Teorema 1.2.23 vrijede i kad su dvije točke od tri točke $y_0, y_1, y_2 \in I$ koincidentne, za familiju diferencijabilnih funkcija f_s takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu (eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, *log*-konveksna u Jensenovom smislu). Nadalje, vrijedi kad su sve tri točke koincidentne za familiju dva puta diferencijabilnih funkcija sa istim svojstvom. Dokazi se mogu dobiti primjenom Napomene 1.2.12 i odgovarajuće karakterizacije konveksnosti.

1.2.3. Sredine Stolarskyjevog tipa

Koristeći funkcionale Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$, definirane redom sa (1.22)-(1.26) na intervalima I_i, $i = 1, \ldots, 5$ danima s (1.27)-(1.31), netom opisanom metodom možemo konstruirati eksponencijalno konveksne funkcije primjenom pozitivnih linearnih funkcionala na odabranu familiju funkcija. Upotrijebit ćemo Teoreme srednje vrijednosti

1.2.6 i 1.2.7 za sredine Stolarskyjevog tipa, definirane funkcionalima Φ_i, $i = 1, \ldots, 5$. Nekoliko familija funkcija koje zadovoljavaju uvjete Teorema 1.2.21, Korolara 1.2.22, Teorema 1.2.23 i Napomene 1.2.24 koje ćemo ovdje prikazati, omogućavaju nam da konstruiramo velike familije funkcija koje su eksponencijalno konveksne.

Primjer 1.2.25. Promatramo familiju funkcija

$$\Omega_1 = \{f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \in \mathbb{R}\}$$

definiranu sa

$$f_s(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{sx} - 1}{s^2}, & s \neq 0\,, \\ \dfrac{x^2}{2}\,, & s = 0\,. \end{cases}$$

Budući da je $\dfrac{d^2 f_s}{dx^2}(x) = e^{sx} > 0$, onda je f_s konveksna na $\mathbb{R}$ za svaki $s \in \mathbb{R}$, i $s \mapsto \dfrac{d^2 f_s}{dx^2}(x)$ je eksponencijalno konveksna funkcija po definiciji.
Korištenjem sličnih tvrdnji kao u dokazu Teorema 1.2.21, možemo zaključiti da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ eksponencijalno konveksna (i eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu).
Uočimo da je $f_s(0) = 0$. Iz Korolara 1.2.22 imamo da su $s \mapsto \Phi_i(f_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ eksponencijalno konveksne funkcije u Jensenovom smislu. Lako se vidi da su ova preslikavanja neprekidna, pa su eksponencijalno konveksna.
Sada ćemo, za ovu familiju funkcija izračunati $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_1)$ iz (1.41).
Neka je $s = q \neq 0, 1$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mu_{s,s_{(s\neq 0,1)}}(\Phi_i, \Omega_1) &= \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}(\Phi_i(f_s))}{\Phi_i(f_s)}\right) = \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\left(\Phi_i\left(\frac{e^{sx}-1}{s^2}\right)\right)}{\Phi_i\left(\frac{e^{sx}-1}{s^2}\right)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\Phi_i\left(\frac{x(e^{sx}-1)}{s^2}\right) + \Phi_i\left(\frac{x}{s^2}\right) - \Phi_i\left(\frac{e^{sx}-1}{s^2}\frac{2}{s}\right)}{\Phi_i\left(\frac{e^{sx}-1}{s^2}\right)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot f_s)}{\Phi_i(f_s)} - \frac{2}{s}\right).
\end{aligned}$$

Za $s = q = 0$ računamo, uz korištenje L' Hospitalova pravila

$$\begin{aligned}
\mu_{0,0}(\Phi_i, \Omega_1) &= \lim_{s\to 0}(\mu_{s,s}(\Phi_i, \Omega_2)) = \lim_{s\to 0}\left(\exp\left(\frac{\Phi_i(id \cdot f_s)}{\Phi_i(f_s)} - \frac{2}{s}\right)\right) \\
&= \exp\left(\lim_{s\to 0}\frac{s\Phi_i\left(x(e^{sx}-1)\right) - 2\Phi_i\left(e^{sx}-1\right)}{s\Phi_i\left(e^{sx}-1\right)}\right) \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{s\to 0}\frac{\Phi_i\left(-xe^{sx} + x^2 s e^{sx}\right)}{\Phi_i\left(e^{sx} - 1 + sxe^{sx}\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\mathrm{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{s\to 0} \frac{\Phi_i\left(x^3 s e^{sx}\right)}{\Phi_i\left(2xe^{sx}+sx^2e^{sx}\right)}\right) \\
&\overset{\mathrm{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{s\to 0} \frac{\Phi_i\left(x^3 e^{sx}+x^4 s e^{sx}\right)}{\Phi_i\left(3x^2e^{sx}+sx^3e^{sx}\right)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\Phi_i\left(x\frac{x^2}{2}\right)}{3\Phi_i\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right) = \exp\left(\frac{\Phi_i(id\cdot f_0)}{3\Phi_i(f_0)}\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, (1.41) postaje

$$
\mu_{s,q}(\Phi_i,\Omega_1) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{\Phi_i(f_s)}{\Phi_i(f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s\neq q\,, \\ \exp\left(\dfrac{\Phi_i(id\cdot f_s)}{\Phi_i(f_s)}-\dfrac{2}{s}\right), & s=q\neq 0\,, \\ \exp\left(\dfrac{\Phi_i(id\cdot f_0)}{3\Phi_i(f_0)}\right), & s=q=0\,, \end{cases}
$$

i korištenjem (1.40), zaključimo da je funkcija $\mu_{s,q}(\Phi_i,\Omega_1)$ monotona po parametrima s i q.

Promotrimo funkcional Φ_1. Ako je Φ_1 pozitivan, onda primjenom Teorema 1.2.7 za $f=f_s\in\Omega_1$ i $u=f_q\in\Omega_1$ slijedi da postoji $\xi\in I_1=[0,M\,(\tau-\alpha)]$ takav da je

$$
e^{(s-q)\xi} = \frac{\Phi_1(f_s)}{\Phi_1(f_q)}\,.
$$

Slijedi da

$$
M_{s,q}(\Phi_1,\Omega_1) \;=\; \log\mu_{s,q}(\Phi_1,\Omega_1)
$$

zadovoljava $0\leq M_{s,q}(\Phi_1,\Omega_1)\leq M\,(\tau-\alpha)$, što dokazuje da je $M_{s,q}(\Phi_1,\Omega_1)$ sredina, koja je po (1.40) monotona. Analogno slijedi

$$
0 \;\leq\; M_{s,q}(\Phi_2,\Omega_1) \;\leq\; \frac{M\,(\beta-\alpha)}{2}\,, \tag{1.47}
$$

$$
0 \;\leq\; M_{s,q}(\Phi_3,\Omega_1) \;\leq \frac{M(\beta-\alpha)^n}{2n!}\,, \tag{1.48}
$$

$$
0 \;\leq\; M_{s,q}(\Phi_4,\Omega_1) \;\leq\; M_1\,(\tau-\alpha)\max_{\left[0,\frac{M}{m}\right]} g\,, \tag{1.49}
$$

$$
0 \;\leq\; M_{s,q}(\Phi_5,\Omega_1) \;\leq\; M_1\,(\tau-\alpha)\max_{\left[0,\frac{M\,(\tau-\alpha)^{n-1}}{m\,n!}\right]} g\,. \tag{1.50}
$$

Dakle, sličnim zaključivanjem dobivamo da su $M_{s,q}(\Phi_i,\Omega_1)$ također monotone sredine za $i=2,\ldots,5$.

Primjer 1.2.26. Promatramo familiju funkcija

$$
\Omega_2=\{g_s:[0,\infty)\to\mathbb{R}:s\in\mathbb{R}\}
$$

definiranu sa

$$g_s(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^s - 1}{s(s-1)}, & s \neq 0, 1, \\ -\log(x+1), & s = 0, \\ (x+1)\log(x+1), & s = 1. \end{cases}$$

Računamo, $\dfrac{d^2 g_s}{dx^2}(x) = (x+1)^{s-2} = e^{(s-2)\log(x+1)} > 0$ što znači da je funkcija g_s konveksna za $x > 0$ i $s \mapsto \dfrac{d^2 g_s}{dx^2}(x)$ je eksponencijalno konveksna po definiciji. Također vrijedi $g_s(0) = 0$. Slično kao u Primjeru 1.2.25 zaključimo da su funkcije $s \mapsto \Phi_i(g_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ eksponencijalno konveksne, kao i *log*-konveksne. Dakle, za $r, s, t \in J$ takve da je $r < s < t$, imamo

$$(\Phi_i(g_s))^{t-r} \leq (\Phi_i(g_r))^{t-s} (\Phi_i(g_t))^{s-r}, \; i = 1, \ldots, 5. \tag{1.51}$$

Posebno, promatramo funkcional

$$\Phi_2(f) = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f\left(\frac{(\beta - \alpha)\,|x'(t)|}{2}\right) dt - \int_\alpha^\beta \left(f\left(|x(t)|\right)\right)' dt \tag{1.52}$$

i dobivamo

$$\Phi_2(g_s) = \begin{cases} -\dfrac{2}{s(s-1)} + \dfrac{2}{(\beta-\alpha)s(s-1)} \displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right)^s dt & \\ -\dfrac{1}{s-1} \displaystyle\int_\alpha^\beta (|x(t)|+1)^{s-1} |x'(t)|\, dt, & s \neq 0, 1, \\ -\dfrac{2}{\beta-\alpha} \displaystyle\int_\alpha^\beta \log\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right) dt + \int_\alpha^\beta \frac{|x'(t)|}{|x(t)|+1}\, dt, & s = 0, \\ \dfrac{2}{\beta-\alpha} \displaystyle\int_\alpha^\beta \left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right) \log\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2} + 1\right) dt & \\ -\displaystyle\int_\alpha^\beta |x'(t)| \left[\log(|x(t)|+1) + 1\right] dt, & s = 1. \end{cases}$$

Sada ćemo, za ovu familiju funkcija izračunati $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_2)$ iz (1.41).
Neka je $s = q \neq 0, 1$. Tada imamo

$$\mu_{s,s_{(s\neq 0,1)}}(\Phi_i, \Omega_2) = \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}(\Phi_i(g_s))}{\Phi_i(g_s)}\right) = \exp\left(\frac{\dfrac{d}{ds}\left(\Phi_i\left(\dfrac{(x+1)^s - 1}{s(s-1)}\right)\right)}{\Phi_i\left(\dfrac{(x+1)^s - 1}{s(s-1)}\right)}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{\Phi_i\left(\frac{(x+1)^s-1}{s(s-1)}\log(x+1)+\frac{\log(x+1)}{s(s-1)}\right)}{\Phi_i(g_s)}+\frac{1-2s}{s(s-1)}\right)\\
&= \exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)}-\frac{\Phi_i(g_s g_0)}{\Phi_i(g_s)}-\frac{\Phi_i(g_0)}{s(s-1)\Phi_i(g_s)}\right).
\end{aligned}
$$

Za $s=q=0$ računamo, uz korištenje L' Hospitalova pravila

$$
\begin{aligned}
\mu_{0,0}(\Phi_i,\Omega_2) &= \lim_{s\to 0}\left(\mu_{s,s}(\Phi_i,\Omega_2)\right)\\
&= \lim_{s\to 0}\left(\exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)}-\frac{\Phi_i(g_s g_0)}{\Phi_i(g_s)}-\frac{\Phi_i(g_0)}{s(s-1)\Phi_i(g_s)}\right)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{s\to 0}\frac{(1-2s)\Phi_i((x+1)^s-1)}{s(s-1)\Phi_i((x+1)^s-1)}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{s(s-1)\left(\Phi_i(\log(x+1)((x+1)^s-1))+\Phi_i(\log(x+1))\right)}{s(s-1)\Phi_i((x+1)^s-1)}\right)\\
&\overset{\text{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{s\to 0}\frac{-2\Phi_i((x+1)^s-1)+s(s-1)\Phi_i((x+1)^s\log^2(x+1))}{(2s-1)\Phi_i((x+1)^s-1)+s(s-1)\Phi_i((x+1)^s\log(x+1))}\right)
\end{aligned}
$$

$$
= \exp\left(\lim_{s\to 0}\frac{-2\Phi_i((x+1)^s\log(x+1))+s(s-1)\Phi_i((x+1)^s\log^2(x+1))}{2\Phi_i((x+1)^s-1)+(2s-1)\Phi_i((x+1)^s\log(x+1))+(2s-1)\Phi_i((x+1)^s\log(x+1))+s(s-1)\Phi_i((x+1)^s\log^2(x+1))}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{-2\Phi_i(\log(x+1))-\Phi_i(\log^2(x+1))}{-\Phi_i(\log(x+1))-\Phi(\log(x+1))}\right)\\
&= \exp\left(1+\frac{\Phi_i(\log^2(x+1))}{2\Phi_i(\log(x+1))}\right)\\
&= \exp\left(1-\frac{\Phi_i(g_0^2)}{2\Phi_i(g_0)}\right).
\end{aligned}
$$

Neka je sada $s=q=1$. Slično, kao u prethodnom izračunu imamo

$$
\begin{aligned}
\mu_{1,1}(\Phi_i,\Omega_2) &= \lim_{s\to 1}\left(\mu_{s,s}(\Phi_i,\Omega_2)\right)\\
&= \lim_{s\to 1}\left(\exp\left(\frac{1-2s}{s(s-1)}-\frac{\Phi_i(g_s g_0)}{\Phi_i(g_s)}-\frac{\Phi_i(g_0)}{s(s-1)\Phi_i(g_s)}\right)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{s\to 1}\frac{(1-2s)\Phi_i((x+1)^s-1)}{s(s-1)\Phi_i((x+1)^s-1)}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{s(s-1)\left(\Phi_i(\log(x+1)((x+1)^s-1))+\Phi_i(\log(x+1))\right)}{s(s-1)\Phi_i((x+1)^s-1)}\right)\\
&= \exp\left(\frac{-2\Phi_i((x+1)\log(x+1))+\Phi_i((x+1)\log^2(x+1))}{\Phi_i((x+1)\log(x+1))+\Phi((x+1)\log(x+1))}\right)\\
&= \exp\left(-1+\frac{\Phi_i((x+1)\log^2(x+1))}{2\Phi_i((x+1)\log(x+1))}\right)\\
&= \exp\left(-1-\frac{\Phi_i(g_0 g_1)}{2\Phi_i(g_1)}\right).
\end{aligned}
$$

Dakle, imamo

$$
\mu_{s,q}(\Phi_i,\Omega_2) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{\Phi_i(g_s)}{\Phi_i(g_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q\,, \\ \exp\left(\dfrac{1-2s}{s(s-1)} - \dfrac{\Phi_i(g_0 g_s)}{\Phi_i(g_s)} - \dfrac{1}{s(s-1)}\dfrac{\Phi_i(g_0)}{\Phi_i(g_s)}\right), & s = q \neq 0,1\,, \\ \exp\left(1 - \dfrac{\Phi_i(g_0^2)}{2\Phi_i(g_0)}\right), & s = q = 0\,, \\ \exp\left(-1 - \dfrac{\Phi_i(g_0 g_1)}{2\Phi_i(g_1)}\right), & s = q = 1\,, \end{cases}
$$

i korištenjem (1.40), zaključimo da je $\mu_{s,q}(\Phi_i,\Omega_2)$ monotona funkcija u parametrima s i q. Dakle, za funkcional Φ_2 dobivamo

$$
\mu_{s,q}(\Phi_2,\Omega_2) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{q(q-1)\left[-2+\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)^s dt - s\int_\alpha^\beta(|x(t)|+1)^{s-1}|x'(t)|dt\right]}{s(s-1)\left(-2+\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)^q dt - q\int_\alpha^\beta(|x(t)|+1)^{q-1}|x'(t)|dt\right]}\right)^{\frac{1}{s-q}}, \\ s \neq q\,, \\ \exp\left(\dfrac{1-2s}{s(s-1)} + \dfrac{\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \log\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)^s dt}{-2+\int_\alpha^\beta\left[\frac{2}{\alpha-\beta}\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)^s - s(|x(t)|+1)^{s-1}|x'(t)|\right]dt}\right. \\ \left. -\dfrac{\int_\alpha^\beta(|x(t)|+1)^{s-1}|x'(t)|(1+s\log(|x(t)|+1))dt}{-2+\int_\alpha^\beta\left[\frac{2}{\alpha-\beta}\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)^s - s(|x(t)|+1)^{s-1}|x'(t)|\right]dt}\right), \\ s = q \neq 0,1\,, \\ \exp\left(1 - \dfrac{\int_\alpha^\beta\left[\log^2\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right) - (\beta-\alpha)\log(|x(t)|+1)\frac{|x'(t)|}{|x(t)|+1}\right]dt}{\int_\alpha^\beta\left[\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{|x(t)|+1} - 2\log\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)\right]dt}\right), \\ s = q = 0\,, \\ \exp\left(-1 + \dfrac{\frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)\log^2\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)dt}{2\int_\alpha^\beta\left[\frac{2}{\beta-\alpha}\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)\log\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right) - |x'(t)|(\log(|x(t)|+1)+1)\right]dt}\right. \\ \left. -\dfrac{\int_\alpha^\beta |x'(t)|\left(\log^2(|x(t)|+1)+2\log(|x(t)|+1)\right)dt}{2\int_\alpha^\beta\left[\frac{2}{\beta-\alpha}\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right)\log\left(\frac{(\beta-\alpha)|x'(t)|}{2}+1\right) - |x'(t)|(\log(|x(t)|+1)+1)\right]dt}\right), \\ s = q = 1\,. \end{cases}
$$

Primjenom Teorema 1.2.7 slijedi da postoji $\xi \in I_2$ takav da je

$$
(\xi+1)^{s-q} = \frac{\Phi_2(g_s)}{\Phi_2(g_q)}\,.
$$

Budući da je funkcija $\xi \mapsto (\xi+1)^{s-q}$ invertibilna za $s \neq q$, imamo

$$
0 \leq \left(\frac{\Phi_2(g_s)}{\Phi_2(g_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}} \leq \frac{M\,(\beta-\alpha)}{2}
$$

što zajedno sa činjenicom da je $\mu_{s,q}(\Phi_2,\Omega_2)$ neprekidna, simetrična i monotona, znači da je $\mu_{s,q}(\Phi_2,\Omega_2)$ sredina. Slično, slijedi da je $\mu_{s,q}(\Phi_i,\Omega_2), i=1,3,4,5$ sredina.

Primjer 1.2.27. Promotrimo familiju funkcija

$$\Omega_3=\{h_s:[0,\infty)\to\mathbb{R}:s>0\}$$

definiranu sa

$$h_s(x)=\begin{cases}\dfrac{s^{-x}-1}{\log^2 s}, & s\neq 1,\\ \dfrac{x^2}{2}, & s=1.\end{cases}$$

Budući da je $s\mapsto \dfrac{d^2h_s}{dx^2}(x)=s^{-x}$ Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti npr. [42]), tj. $s^{-x}=\dfrac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty e^{-st}t^{x-1}\,dt$, ona je eksponencijalno konveksna na $(0,\infty)$. Očito da su h_s konveksne funkcije za svaki $s>0$ i $h_s(0)=0$. Slično kao u Primjeru 1.2.25 zaključimo da je preslikavanje $s\mapsto\Phi_i(h_s)$, $i=1,\ldots,5$ eksponencijalno konveksno.

Sada ćemo, za ovu familiju funkcija izračunati $\mu_{s,q}(\Phi_i,\Omega_3)$ iz (1.41).

Neka je $s=q\neq 1$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mu_{s,s_{(s\neq1)}}(\Phi_i,\Omega_3) &= \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}(\Phi_i(h_s))}{\Phi_i(h_s)}\right)=\exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\left(\Phi_i\left(\frac{s^{-x}-1}{\log^2 s}\right)\right)}{\Phi_i\left(\frac{s^{-x}-1}{\log^2 s}\right)}\right)\\ &= \exp\left(\frac{\Phi_i\left(\frac{-x(s^{-x}-1)}{s\log^2 s}\right)-\Phi_i\left(\frac{x}{s\log^2 s}\right)-\Phi_i\left(\frac{2(s^{-x}-1)}{s\log^3 s}\right)}{\Phi_i\left(\frac{e^{sx}-1}{s^2}\right)}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\Phi_i(id\cdot h_s)}{s\Phi_i(h_s)}-\frac{2}{s\log s}\right).\end{aligned}$$

Za $s=q=1$ računamo, uz korištenje L' Hospitalova pravila

$$\begin{aligned}\mu_{1,1}(\Phi_i,\Omega_3) &= \lim_{s\to1}\left(\mu_{s,s}(\Phi_i,\Omega_3)\right)\\ &= \lim_{s\to1}\left(\exp\left(\frac{\Phi_i(id\cdot h_s)}{\Phi_i(h_s)}-\frac{2}{s\log s}\right)\right)\\ &= \exp\left(\lim_{s\to1}\frac{\Phi_i\left(-xs^{-x}\log s\right)-\Phi_i(2(s^{-x}-1))}{s\log s(s^{-x}-1)}\right)\\ &\overset{\text{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{s\to1}\frac{\Phi_i\left(-x^2s^{-x-1}\log s+xs^{-x-1}\right)}{\Phi_i\left(s^{-x}\log s+s^{-x}-\log s-1+s^{-x}\log s\right)}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\Phi_i\left(x\frac{x^2}{2}\right)}{3\Phi_i\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\Phi_i(id\cdot h_0)}{3\Phi_i(h_0)}\right).\end{aligned}$$

Dakle, (1.41) postaje

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Phi_i(h_s)}{\Phi_i(h_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q\,, \\ \exp\left(-\dfrac{\Phi_i(id \cdot h_s)}{s\Phi_i(h_s)} - \dfrac{2}{s\log s}\right), & s = q \neq 1\,, \\ \exp\left(-\dfrac{\Phi_i(id \cdot h_1)}{3\Phi_i(h_1)}\right), & s = q = 1\,, \end{cases}$$

te iz (1.40) slijedi da su monotone po parametrima s i q.
Primjenom Teorema 1.2.7 slijedi da postoji $\xi \in I_1$ takav da je

$$\left(\frac{s}{q}\right)^{-\xi} = \frac{\Phi_1(h_s)}{\Phi_1(h_q)}\,.$$

Dakle,

$$M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3) = -L(s,q)\log \mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3),$$

zadovoljava $0 \leq M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3) \leq M\,(\tau - \alpha)$, što dokazuje da je $M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_3)$ također sredina, gdje je $L(s,q)$ je logaritamska sredina definirana sa

$$L(s,q) = \begin{cases} \dfrac{s-q}{\ln s - \ln q}\,, & s \neq q\,, \\ s\,, & s = q\,. \end{cases}$$

Analogno, za familiju Ω_3, dobijemo kao u (1.47) – (1.50), tj. $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_3)$ su također monotone sredine, $i = 2, \ldots, 5$.

Primjer 1.2.28. Promotrimo familiju funkcija

$$\Omega_4 = \{k_s : [0,\infty) \to \mathbb{R} : s > 0\}$$

definiranu s

$$k_s(x) = \frac{e^{-x\sqrt{s}} - 1}{s}\,.$$

Ponovno, zaključimo da je $s \mapsto \dfrac{d^2 k_s}{dx^2}(x) = e^{-x\sqrt{s}}$ Laplaceova transformacija nenegativne funkcije (vidjeti npr. [42]) , tj. $e^{-x\sqrt{s}} = \dfrac{s}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-st}e^{-x^2/4t}}{t\sqrt{t}}\,dt$ je eksponencijalno konveksna na $(0,\infty)$. Za svaki $s > 0$, k_s su konveksne funkcije i vrijedi $k_s(0) = 0$. Slično kao u Primjeru 1.2.25 zaključimo da je preslikavanje $s \mapsto \Phi_i(k_s)$, $i = 1, \ldots, 5$ eksponencijalno konveksno.
Sada ćemo za ovu familiju funkcija izračunati $\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$ iz (1.41).

Za $s = q$ imamo

$$\begin{aligned}
\mu_{s,s}(\Phi_i, \Omega_4) &= \exp\left(\frac{\frac{d}{ds}\Phi_i\left(\frac{e^{-x\sqrt{s}}-1}{s}\right)}{\Phi_i\left(\frac{e^{-x\sqrt{s}}-1}{s}\right)} \right) \\
&= \exp\left(\frac{\Phi_i\left(\frac{-xe^{-x\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}s}\right) - \Phi_i\left(\frac{e^{-x\sqrt{s}}-1}{s^2}\right)}{\Phi_i\left(\frac{e^{-x\sqrt{s}}-1}{s}\right)} \right) \\
&= \exp\left(-\frac{\Phi_i(id \cdot k_s)}{2\sqrt{s}\,\Phi_i(k_s)} - \frac{1}{s} \right). \qquad (1.53)
\end{aligned}$$

Dakle, sada u (1.41) imamo

$$\mu_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Phi_i(k_s)}{\Phi_i(k_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}}, & s \neq q\,, \\ \exp\left(-\dfrac{\Phi_i(id \cdot k_s)}{2\sqrt{s}\,\Phi_i(k_s)} - \dfrac{1}{s} \right), & s = q\,, \end{cases}$$

i po (1.40) je monotona po parametrima s i q.
Primjenom Teorema 1.2.7 slijedi da postoji $\xi \in I_1$ takav da je

$$e^{-\xi\left(\sqrt{s}-\sqrt{q}\right)} = \frac{\Phi_i(k_s)}{\Phi_i(k_q)}\,.$$

Budući da

$$M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4) = -\left(\sqrt{s}+\sqrt{q}\right)\log \mu_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4)$$

zadovoljava

$$0 \leq M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4) \leq M\,(\tau - \alpha)\,,$$

slijedi da je $M_{s,q}(\Phi_1, \Omega_4)$ sredina.
Slično, za familiju Ω_4, slijedi (1.47) – (1.50), tj. $M_{s,q}(\Phi_i, \Omega_4)$ su monotone sredine za $i = 2, \ldots, 5$.

1.3. Rezultati za funkcije više varijabli

U ovom odjeljku ćemo poopćiti nejednakosti Godunova-Levinova tipa iz Teorema 1.2.1 te nejednakost Rozanovina tipa iz Teorema 1.2.4 promatrajući funkcije više varijabli.
Koristimo sljedeće oznake. Neka je $\Omega = \prod_{j=1}^{m}[a_j, b_j]$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$ opća točka u Ω, $\Omega_t = \displaystyle\prod_{j=1}^{m}[a_j, t_j]$ i $dt = dt_1 \ldots dt_m$.
Nadalje, neka je

$$Du(x) = \frac{d}{dx}u(x),$$

$$D_k u(t_1,\ldots,t_m) = \frac{\partial}{\partial t_k} u(t_1,\ldots,t_m)$$

i

$$D^k u(t_1,\ldots,t_m) = D_1 \cdots D_k u(t_1,\ldots,t_m), \quad 1 \le k \le m.$$

Nadalje, neka je $\Omega' = \prod_{j=2}^{m}[a_j, b_j]$ i $dt' = dt_2 \ldots dt_m$. Neka je $|\Omega| = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$ i $\bar{\Omega}_t = \prod_{j=1}^{m}[t_j, b_j]$.
Neka je

$$D^{j,l} u(t_1,\ldots,t_m) = \frac{\partial^{jl}}{\partial t_1^l \ldots \partial t_j^l} u(t_1,\ldots,t_m), \quad 1 \le j \le m, 1 \le l \le n.$$

Sa $C^{mn}(\Omega)$ označavamo prostor svih funkcija u na Ω koje imaju neprekidne derivacije $D^{j,l}u$ za $j = 1,\ldots,m$ i $l = 1,\ldots,n$. Kao i do sada, $AC(\Omega)$ je prostor svih apsolutno neprekidnih funkcija na Ω. Sa $AC^{mn}(\Omega)$ označavamo prostor svih funkcija $u \in C^{m(n-1)}(\Omega)$ sa $D^{m,(n-1)}u \in AC(\Omega)$.
Navodimo i Teorem 1. iz [19] za više varijabli.

Teorem 1.3.1. *Neka je $m \ge 2$ i neka su x_i, $D^j x_i$, $i = 1,\ldots,p$, $j = 1,\ldots,m$ realne neprekidne funkcije na Ω za koje je*

$$x_i(t)|_{t_j = a_j} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,p\,,\ j = 1,\ldots,m$$

ili

$$x_i(t)|_{t_1=a_1} = D^1 x_i(t)|_{t_2=a_2} = \ldots = D^{m-1} x_i(t)|_{t_m=a_m} = 0\,, \quad i = 1,\ldots,p\,.$$

Nadalje, neka je f nenegativna i diferencijabilna funkcija na $[0,\infty)^p$ za koju vrijedi $f(0,\ldots,0) = 0$ i za koju su $D_i f$, $i = 1,\ldots,p$ nenegativne, neprekidne i rastuće $[0,\infty)^p$. Tada je

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(|x_1(t)|,\ldots,|x_p(t)|\right) |D^m x_i(t)| \right) dt \\ &\le \ f\left(\int\limits_{\Omega} |D^m x_1(t)|\, dt, ..., \int\limits_{\Omega} |D^m x_p(t)|\, dt \right). \end{aligned} \tag{1.54}$$

U dokazima ćemo koristiti sljedeću lemu o konveksnim funkcijama s više varijabli koja se može naći u [36, str. 11.]

Lema 1.3.2. *Neka je f definirana na otvorenom konveksnom skupu $U \subset \mathbb{R}^n$. Ako je f (strogo) konveksna na U i gradijent $f'(x)$ postoji na U, onda je f' (strogo) rastuća na U.*

Prvo dajemo poopćenje Teorema 1.3.1.

Teorem 1.3.3. *Neka su* $m, n, p \in \mathbb{N}$, f *nenegativna i diferencijabilna funkcija na* $[0,\infty)^p$, *sa* $f(0,\ldots,0) = 0$. *Nadalje, neka su za* $i = 1,\ldots,p$ *funkcije* $x_i \in AC^{mn}(\Omega)$ *takve da vrijedi*

$$D^{j,l}x_i(t)|_{t_j=a_j} = 0 \qquad j = 1,\ldots,m, \quad l = 0,\ldots,n-1.$$

Neka su $D_i f$, $i = 1,\ldots,p$, *nenegativne, neprekidne i rastuće na* $[0,\infty)^p$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(|x_1(t)|,\ldots,|x_p(t)|\right)|D^{m,n}x_i(t)| \right) dt \\
\leq\ & \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} f\Bigg(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \int_\Omega |D^{m,n}x_1(t)|\,dt, ..., \\
& \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \int_\Omega |D^{m,n}x_p(t)|\,dt \Bigg). \qquad (1.55)
\end{aligned}$$

Dokaz. Proširit ćemo metodu korištenu u Teoremu 1.2.1 tako da se može koristiti za funkcije više varijabli. Neka je

$$\begin{aligned}
y_i(t) &= \int_{\Omega_t}\int_{\Omega_{t,1}}\cdots\int_{\Omega_{t,m-1}} |D^{m,n}x_i(s)|\,ds\,dt_{1,1}\ldots dt_{m,n-1} \\
&= \frac{1}{((n-1)!)^m}\int_{\Omega_t}\prod_{j=1}^{m}(t_j-s_j)^{n-1}|D^{m,n}x_i(s)|\,ds\,, \qquad (1.56)
\end{aligned}$$

za $t \in \Omega$, $i = 1,\ldots,p$. Vrijedi da je

$$D^{m,n}y_i(t) = |D^{m,n}x_i(t)| \text{ i } y_i(t) \geq |x_i(t)|.$$

Lako zaključimo da je za svaki $l = 0,\ldots,n-1$, $D^{j,l}y_i(t) \geq 0$ i $D^{j,l}y_i$ rastuća funkcija na Ω za $i = 1,\ldots,p$ i $j = 1,\ldots,m$. Iz $D^{j,l}y_i(t)|_{t_j=a_j} = 0$ slijedi

$$y_i(t) \leq \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} D^{m,(n-1)}y_i(t)\,, \quad t \in \Omega\,.$$

Definiramo

$$u_i(t) = \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} D^{m,(n-1)}y_i(t)$$

za $t \in \Omega$ i $i = 1,\ldots,p$. Budući da su $D_i f$ nenegativne, neprekidne i rastuće na $[0,\infty)^p$ slijedi

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(|x_1(t)|, \ldots, |x_p(t)|\right) |D^{m,n} x_i(t)| \right] dt \\
&\quad \le \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(y_1(t), \ldots, y_p(t)\right) D^{m,n} y_i(t) \right] dt \qquad (1.57) \\
&\quad \le \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} D^{m,(n-1)} y_1(t), \ldots, \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} D^{m,(n-1)} y_p(t) \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \times D^{m,n} y_i(t) \right] dt \\
&\quad \le \int_{a_1}^{b_1} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(u_1(t_1, b_{2,\ldots,} b_m), \ldots, u_p(t_1, b_{2,\ldots,} b_m)\right) \times \int\limits_{\Omega'} D^{m,n} y_i(t)\, dt' \right] dt_1 \\
&\quad \le \int_{a_1}^{b_1} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(u_1(t_1, b_{2,\ldots,} b_m), \ldots, u_p(t_1, b_{2,\ldots,} b_m)\right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} D_1 u_i(t_1, b_2 \ldots, b_m) \right] dt_1 \\
&\quad = \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{d}{dt_1} \left[f\left(u_1(t_1, b_{2,\ldots,} b_m), \ldots, u_p(t_1, b_{2,\ldots,} b_m)\right) \right] dt_1 \\
&= \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} f\left(u_1(b_1, b_{2,\ldots,} b_m), \ldots, u_p(b_1, b_{2,\ldots,} b_m)\right) \\
&= \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} f\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \int\limits_{\Omega} |D^{m,n} x_1(t)|\, dt, \ldots, \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \int\limits_{\Omega} |D^{m,n} x_p(t)|\, dt \right).
\end{aligned}
$$

□

Napomena 1.3.4. Za $n = 1$ nejednakost (1.55) postaje nejednakost (1.54).

Sada ćemo iskazati teorem 1.3.3 u kojem je f konveksna funkcija.

Teorem 1.3.5. *Neka su $m, n, p \in \mathbb{N}$, f konveksna i diferencijabilna funkcija na $[0, \infty)^p$ za koju vrijedi $f(0, \ldots, 0) = 0$. Nadalje, neka su za $i = 1, \ldots, p$ funkcije $x_i \in AC^{mn}\Omega$ takve da je $D^{j,l} x_i(t)|_{t_j = a_j} = 0$, za svaki $j = 1, \ldots, m$ i $l = 0, \ldots, n-1$. Tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(|x_1(t)|, \ldots, |x_p(t)|\right) |D^{m,n} x_i(t)| \right) dt \\
&\quad \le \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^n} \int\limits_{\Omega} f\left(\frac{|\Omega|^n}{((n-1)!)^m} |D^{m,n} x_1(t)|, \ldots, \frac{|\Omega|^n}{((n-1)!)^m} |D^{m,n} x_p(t)| \right) dt .
\end{aligned}
$$

Dokaz. Slično kao u dokazu prethodnog teorema dobivamo nejednakost (1.55), samo što u (1.57) primijenimo Lemu 1.3.2, budući da je f konveksna funkcija. Sada primjenom Jensenove integralne nejednakosti (1.7) imamo

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(|x_1(t)|, \ldots, |x_p(t)|\right)|D^{m,n}x_i(t)|\right] dt \\
\leq\ & \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} f\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\int_\Omega |D^{m,n}x_1(t)|\,dt, ..., \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\int_\Omega |D^{m,n}x_p(t)|\,dt\right) \\
=\ & \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^{n-1}} f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{|\Omega|^n}{((n-1)!)^m}|D^{m,n}x_1(t)|\,dt, ...,\right. \\
& \left.\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{|\Omega|^n}{((n-1)!)^m}|D^{m,n}x_p(t)|\,dt\right) \\
\leq\ & \frac{((n-1)!)^m}{|\Omega|^n}\int_\Omega f\left(\frac{|\Omega|^n}{((n-1)!)^m}|D^{m,n}x_1(t)|, ..., \frac{|\Omega|^n}{((n-1)!)^m}|D^{m,n}x_p(t)|\right) dt\,.
\end{aligned}
$$

□

Napomena 1.3.6. Posebno, iz Teorema 1.3.5 za $p = 1$ i $m = 1$, slijedi Teorem 1.2.1.

Sljedeći teorem je poopćenje Teorema 1.2.4 na više varijabli.

Teorem 1.3.7. *Neka su $m, n, p \in \mathbb{N}$, f konveksna i diferencijabilna funkcija na $[0,\infty)^p$ za koju vrijedi $f(0,\ldots,0) = 0$. Neka su za svaki $i = 1,\ldots,p$ funkcije g_i konveksne, nenegativne i rastuće na $[0,\infty)$, a funkcije $h_i : \Omega \to [0,\infty)$ takve da su $D^m h_i$ nenegativne i da za svaki $j = 1,\ldots,m$ vrijedi $D^{j-1}h_i(t)|_{t_j=a_j} = 0$. Nadalje, za svaki $i = 1,\ldots,p$ neka su funkcije $x_i \in AC^{mn}\Omega$ takve da je*

$$D^{j,l}x_i(t)|_{t_j=a_j} = 0, \qquad j = 1,\ldots,m, \quad l = 0,\ldots,n-1.$$

Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(h_1(t)g_1\left(\frac{|x_1(t)|}{h_1(t)}\right), \ldots, h_p(t)g_p\left(\frac{|x_p(t)|}{w_p(t)}\right)\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left.\times D^m h_i(t) g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_i(t)|}{D^m h_i(t)}\right)\right) dt \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\left(|\Omega| D^m h_1(t) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_1(t)|}{D^m h_1(t)}\right), \ldots,\right. \\
&\qquad\qquad \left.|\Omega| D^m h_p(t) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_p(t)|}{D^m h_p(t)}\right)\right) dt.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Kao u dokazu Teorema 1.3.3, za $i = 1, \ldots, p$, $t \in \Omega$, imamo

$$D^{m,n} y_i(t) = |D^{m,n} x_i(t)|, \quad y_i(t) \geq |x_i(t)|$$

te

$$y_i(t) \leq \frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} D^{m,n-1} y_i(t).$$

Primjenom Jensenove nejednakosti (1.7), svojstva monotonosti i konveksnosti za funkcije g_i, za svaki $i = 1, \ldots, p$, slijedi

$$\begin{aligned}
g_i\left(\frac{|x_i(t)|}{h_i(t)}\right) &\leq g_i\left(\frac{y_i(t)}{h_i(t)}\right) \\
&\leq g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n-1} y_i(t)}{h_i(t)}\right) \\
&= g_i\left(\frac{\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \int_{\Omega_t} D^m h_i(s) \frac{|D^{m,n} x_i(s)|}{D^m h_i(s)} ds}{\int_{\Omega_t} D^m h_i(s) ds}\right) \\
&\leq \frac{1}{h_i(t)} \int_{\Omega_t} D^m h_i(s) g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n} y_i(s)}{D^m h_i(s)}\right) ds\,.
\end{aligned}$$

Definiramo

$$U_i(s) = D^m h_i(s) g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n} y_i(s)}{D^m h_i(s)}\right),$$

za $t \in \Omega$ i $i = 1, \ldots, p$.
Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(h_1(t) g_1\left(\frac{|x_1(t)|}{h_1(t)}\right), \ldots, h_p(t) g_p\left(\frac{|x_p(t)|}{h_p(t)}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. \times D^m h_i(t) g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n}|x_i(t)|}{D^m h_i(t)}\right)\right] dt \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(\int_{\Omega_t} D^m h_1(s) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n} y_1(s)}{D^m h_1(s)}\right) ds, \ldots,\right.\right. \\
&\qquad \left. \int_{\Omega_t} D^m h_p(s) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n} y_p(s)}{D^m h_p(s)}\right) ds\right) \\
&\qquad \left. \times D^m h_i(t) g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m} \frac{D^{m,n} y_i(t)}{D^m h_i(t)}\right)\right] dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(\int_{\Omega_t} U_1(s)\,ds,\ldots,\int_{\Omega_t} U_p(s)\,ds\right)U_i(t)\right] dt \\
&= f\left(\int_\Omega U_1(t)\,dt,\ldots,\int_\Omega U_p(t)\,dt\right) \\
&= f\left(\int_\Omega D^m h_1(t) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{D^{m,n}y_1(t)}{D^m h_1(t)}\right)dt,...,\right. \\
&\qquad \left.\int_\Omega D^m h_p(t) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{D^{m,n}y_p(t)}{D^m h_p(t)}\right)dt\right). \\
&= f\left(\int_\Omega D^m h_1(t) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_1(t)|}{D^m h_1(t)}\right)dt,...,\right. \\
&\qquad \left.\int_\Omega D^m h_p(t) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_p(t)|}{D^m h_p(t)}\right)dt\right).
\end{aligned} \tag{1.58}
$$

Još jednom primijenimo Jensenovu nejednakost i dobijemo

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{p} D_i f\left(h_1(t)g_1\left(\frac{|x_1(t)|}{h_1(t)}\right),\ldots,h_p(t)g_p\left(\frac{|x_p(t)|}{h_p(t)}\right)\right)\right. \\
&\qquad \left.\times D^m h_i(t) g_i\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{D^{m,n}|x_i(t)|}{D^m h_i(t)}\right)\right] dt \\
&\le f\left(\frac{1}{2}\int_\Omega D^m h_1(t) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_1(t)|}{D^m h_1(t)}\right)dt,...,\right. \\
&\qquad \left.\frac{1}{2}\int_\Omega D^m h_p(t) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_p(t)|}{D^m h_p(t)}\right)dt\right) \\
&= f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\Omega|\, D^m h_1(t) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_1(t)|}{D^m h_1(t)}\right)dt,...,\right. \\
&\qquad \left.\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\Omega|\, D^m h_p(t) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_p(t)|}{D^m h_p(t)}\right)dt\right) \\
&\le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f\left(|\Omega|\, D^m h_1(t) g_1\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_1(t)|}{D^m h_1(t)}\right),...,\right. \\
&\qquad \left.|\Omega|\, D^m h_p(t) g_p\left(\frac{|\Omega|^{n-1}}{((n-1)!)^m}\frac{|D^{m,n}x_p(t)|}{D^m h_p(t)}\right)\right)dt\,.
\end{aligned}
$$

□

Napomena 1.3.8. Teorem 1.2.4 slijedi za $p = 1$ i $m = 1$. Također nejednakost (1.58) je proširenje nejednakosti dane u [18, Teoremom 1].

Poglavlje 2.

Nejednakosti Opialova tipa povezane s Mitrinović-Pečarićevim nejednakostima

Većina rezultata prikazanih u ovom poglavlju objavljena je u člancima [5], [7] i [9].

2.1. Proširenje prve Mitrinović-Pečarićeve nejednakosti

Sljedećim teoremom dana je Mitrinović-Pečarićeva nejednakost [32] (vidjeti i [4, p. 89], [36, p. 236]), koja generalizira Opialovu nejednakost. Budući da ćemo u sljedećem tekstu razmatrati još neke rezultate ovih autora, ovu ćemo nejednakost zvati prva Mitrinović-Pečarićeva nejednakost. Prije samog teorema definiramo potrebnu klasu funkcija.

Kažemo da je funkcija $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ klase $U(v,K)$ ako se može prikazati kao

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)\,dt,$$

gdje je v neprekidna funkcija na $[a,b]$ i K proizvoljna nenegativna jezgra definirana na $[a,b] \times [a,b]$ takva da $v(x) > 0$ povlači $u(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$.

Teorem 2.1.1. *Neka je u_1 klase $U(v_1,K)$, u_2 klase $U(v_2,K)$ i $v_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Nadalje, neka su ϕ i f konveksne i rastuće funkcije na $[0,\infty)$ i neka vrijedi $f(0) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija i $M = \max K(x,t)$, onda vrijedi*

$$M \int_a^b v_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) f'\left(u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right) dt \leq f\left(M \int_a^b v_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) dt\right). \tag{2.1}$$

Sada ćemo dati novo proširenje nejednakosti ovog tipa iz kojih konstruiramo funkcionale i dokazujemo teorem srednje vrijednosti. Kasnije ćemo dokazati nove nejednakosti za razlomljene integrale i razlomljene derivacije, kao primjenu glavnog rezultata.

Teorem 2.1.2. *Neka je u_1 klase $U(v_1, K)$, u_2 klase $U(v_2, K)$ i $v_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Nadalje, neka je funkcija ϕ konveksna, nenegativna i rastuća na $[0, \infty]$ a f konveksna funkcija na $[0, \infty]$, za koju vrijedi $f(0) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija i $M = \max K(x, t)$, onda vrijedi*

$$\begin{aligned} & M \int_a^b v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) f'\left(u_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right) dt \\ \leq \; & f\left(M \int_a^b v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) dt\right) \\ \leq \; & \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(M(b-a) v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right)\right) dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dokaz. Desnu stranu nejednakosti (2.1) pomnožimo i podijelimo faktorom $(b - a)$. Sada možemo primijeniti Jensenovu nejednakost za funkciju f te dobijemo nejednakost (2.2). □

Napomena 2.1.3. Uvjet Teorema 2.1.1 da je funkcija f rastuća je ustvari nepotreban. Iz dokaza teorema [32] vidi se da se to svojstvo ne koristi u dokazu. Također, u Teoremu 2.1.1 nedostaje uvjet da funkcija ϕ mora biti nenegativna, pa je dodan u Teoremu 2.1.2.

Motivirani nejednakostima danim u Teoremu 2.1.2, definiramo dva funkcionala:

$$\begin{aligned} \lambda_1(f) &= f\left(M \int_a^b v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) dt\right) \\ &\quad - M \int_a^b v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) f'\left(u_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right) dt, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(f) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(M(b-a) v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right)\right) dt \\ &\quad - f\left(M \int_a^b v_2(t)\, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) dt\right), \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdje je f diferencijabilna funkcija za koju vrijedi $f(0) = 0$ te M, ϕ, u_1, u_2, v_1, v_2 kao u Teoremu 2.1.2. Ako je f konveksna funkcija, onda iz Teorema 2.1.2 slijedi da su $\lambda_i(f) \geq 0$, $i = 1, 2$.

Sada ćemo dati teorem srednje vrijednosti za funkcionale λ_1 i λ_2 definirane redom, s (2.3) i (2.4).
Neka je $0 < m_2 \leq v_2 \leq M_2$, $0 \leq |v_1| \leq M_1$ i $\phi \geq 0$. Tada je $0 \leq \left|\frac{v_1}{v_2}\right| \leq \frac{M_1}{m_2}$. Slijedi

$$m_2 \, M \, (b-a) \min_{\left[0, \frac{M_1}{m_2}\right]} \phi \leq M \int_a^b v_2(t) \, \phi\left(\left|\frac{v_1(t)}{v_2(t)}\right|\right) dt \leq M_2 \, M \, (b-a) \max_{\left[0, \frac{M_1}{m_2}\right]} \phi \, .$$

Također

$$0 \leq \left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right| \leq \frac{M_1 \int_a^t K(x,\tau) \, d\tau}{m_2 \int_a^t K(x,\tau) \, d\tau} = \frac{M_1}{m_2} \, .$$

Budući da je $|u_2(t)| \leq M M_2 \, (b-a)$, imamo

$$0 \leq u_2(t) \, \phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right) \leq M M_2 \, (b-a) \max_{\left[0, \frac{M_1}{m_2}\right]} \phi.$$

Neka je od sada nadalje, f funkcija, $f : I \to \mathbb{R}$ gdje je

$$I = \left[0, M M_2 \, (b-a) \max_{\left[0, \frac{M_1}{m_2}\right]} \phi\right] . \tag{2.5}$$

Teorem 2.1.4. *Neka je u_1 klase $U(v_1, K)$, u_2 klase $U(v_2, K)$ i $v_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0, \infty)$, $f, g \in C^2(I)$ i $f(0) = g(0) = 0$.*

(i) Tada postoje $\xi_i \in I$ takvi da vrijedi

$$\frac{\lambda_i(f)}{\lambda_i(g)} = \frac{f''(\xi_i)}{g''(\xi_i)}, \quad i = 1, 2, \tag{2.6}$$

gdje su nazivnici različiti od nula.

(ii) Posebno, kada je funkcija $g(x) = x^2$, slijedi da postoje $\xi_i \in I$ takvi da vrijedi

$$\lambda_i(f) = \frac{f''(\xi_i)}{2} \lambda_i(g), \quad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

Prethodni se teorem dokazuje analogno kao Teoremi 1.2.6 i 1.2.7.
Iskažimo teoreme u kojima se razmatra n-eksponencijalna konveksnost funkcionala λ_1 i λ_2, a koji se dokazuju korištenjem metode opisane u odjeljku 1.2.2..

Teorem 2.1.5. *Neka je $\Upsilon = \{f_s : s \in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; f_s]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$. Nadalje, neka su λ_1 i λ_2 linearni funkcionali definirani s (2.3) i (2.4). Tada su funkcije $s \mapsto \lambda_1(f_s)$ i $s \mapsto \lambda_2(f_s)$ n-eksponencijalno konveksne u Jensenovom smislu na J. Ako su još funkcije $s \mapsto \lambda_1(f_s)$ i $s \mapsto \lambda_2(f_s)$ neprekidne na J, onda su n-eksponencijalno konveksne na J.*

Definiramo

$$\mu_{s,q}(\lambda_i,\Omega)=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda_i(f_s)}{\lambda_i(f_q)}\right)^{\frac{1}{s-q}} & ,\ s\neq q\,,\\ \exp\left(\dfrac{\frac{d}{ds}\lambda_i(f_s)}{\lambda_i(f_s)}\right) & ,\ s=q\,.\end{cases}\tag{2.8}$$

Teorem 2.1.6. *Neka je $\Omega=\{f_s : s\in J\}$, gdje je J interval u $\mathbb{R}$, familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s\mapsto[y_0,y_1,y_2;f_s]$ 2-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0,y_1,y_2\in I$. Nadalje, neka su λ_1 i λ_2 linearni funkcionali definirani s* (2.3) *i* (2.4)*. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Ako su funkcije $s\mapsto\lambda_1(f_s)$ i $s\mapsto\lambda_2(f_s)$ neprekidne na J, onda su 2-eksponencijalno konveksne funkcije na J. Ako su funkcije $s\mapsto\lambda_1(f_s)$ i $s\mapsto\lambda_2(f_s)$ dodatno pozitivne, onda su također log-konveksne na J. Tada za $r,s,t\in J$ takve da je $r<s<t$ vrijedi

$$(\lambda_i(f_s))^{t-r}\le(\lambda_i(f_r))^{t-s}(\lambda_i(f_t))^{s-r}\ ,\ i=1,2\,.\tag{2.9}$$

(ii) Ako su funkcije $s\mapsto\lambda_1(f_s)$ i $s\mapsto\lambda_2(f_s)$ strogo pozitivne i diferencijabilne na J, onda za svaki izbor $s,q,r,t\in J$, , takvih da je $s\le r$ i $q\le t$, vrijedi

$$\mu_{s,q}(\lambda_i,\Omega)\ \le\ \mu_{r,t}(\lambda_i,\Omega)\,,\ i=1,2.\tag{2.10}$$

Sada bi mogli, slično kao u potpoglavlju 1.2.3., korištenjem Cauchyjevog teorema srednje vrijednosti 2.1.4 dati sredine Stolarskyjevog tipa, definirane funkcionalima λ_1 i λ_2. Tada bi mogli dati nekoliko familija funkcija, koje omogućavaju konstrukciju velikih familija funkcija koje su eksponencijalno konveksne.

2.1.1. Nejednakosti s razlomljenim integralima i derivacijama

Sada ćemo dati nejednakosti Mitrinović-Pečarić-Opialova tipa koje uključuju razlomljene integrale i razlomljene derivacije. No, prije toga prisjetimo se definicije i osnovnih svojstava razlomljnenih integrala i derivacija koje ćemo koristiti. Promatramo Riemann-Liouvilleov te Hadamardov razlomljeni integral i tri glavna tipa razlomljenih derivacija: Riemann–Liouvilleove, Canavatijeve i Caputove na realnoj domeni. Više detalja može se naći u [20], [26], [37] i [39].
Neka je $[a,b]\subset\mathbb{R}$ segment. Za cijeli dio realnog broja α koristimo oznaku $[\alpha]$.
Gama funkcija Γ je na uobičajeni način definirana Eulerovim integralom druge vrste

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,\quad \Re(z)>0.\tag{2.11}$$

Ovaj integral je konvergentan za svaki $z\in\mathbb{C}$ uz $\Re(z)>0$. Vrijedi

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\quad \Re(z)>0,$$

pa slijedi

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral

Neka je $x \in [a,b]$. Postoje dvije vrste ovakvog integrala, i to lijevi razlomljeni integral $\int_a^x$, tj. integral s čvrstom donjom granicom a i promjenjivom gornjom granicom x, te desni razlomljeni integral $\int_x^b$ s promjenjivom donjom i čvrstom gornjom granicom.

Definicija 2.1.7. *Neka je $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ i $f \in L_1[a,b]$. Riemann-Liouvilleov lijevi razlomljeni integral $J_{a+}^{\alpha} f$ definiran je s*

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x \in [a,b], \tag{2.12}$$

a Riemann-Liouvilleov desni razlomljeni integral $J_{b-}^{\alpha} f$ definiran je s

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x \in [a,b]. \tag{2.13}$$

Navedeni razlomljeni integrali, definirani za funkcije $f \in L_1[a,b]$, postoje gotovo svuda na $[a,b]$ i vrijedi $J_{a+}^{\alpha} f$, $J_{b-}^{\alpha} f \in L_1[a,b]$.

Za $\alpha = n \in \mathbb{N}$ razlomljeni integrali (2.12) i (2.13) se podudaraju s n-terostrukim integralom, tj.

$$\begin{aligned} J_{a+}^{\alpha} f(t) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{b-}^{\alpha} f(t) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

Riemann-Liouvilleova razlomljena derivacija

Definicija 2.1.8. *Neka je $\alpha > 0$, $n = [\alpha]+1$ i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Riemann-Liouvilleova lijeva razlomljena derivacija $D_{a+}^{\alpha} f$ definirana je s*

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} J_{a+}^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \tag{2.14}$$

a Riemann-Liouvilleova desna razlomljena derivacija $D_{b+}^{\alpha} f$ definirana je s

$$D_{b+}^{\alpha} f(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} J_{b-}^{n-\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \tag{2.15}$$

Posebno, za $0 < \alpha < 1$ vrijedi

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)^{-\alpha}f(t)dt,$$

$$D^{\alpha}_{b+}f(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b (t-x)^{-\alpha}f(t)dt.$$

Za $\alpha = n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$D^{n}_{a+}f(x) = f^{(n)}(x), \quad D^{n}_{b+}f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x),$$

dok za $\alpha = 0$ imamo

$$D^{0}_{a+}f(x) = D^{0}_{b+}f(x) = f(x).$$

Također ćemo koristiti

$$J^{-\alpha}_{a+}f := D^{\alpha}_{a+}f, \quad J^{-\alpha}_{b-}f := D^{\alpha}_{b-}f, \quad \alpha > 0.$$

Teorem 2.1.9. *Neka je $\alpha \geq 0$ i $n = [\alpha]+1$. Ako je $f \in AC^n[a,b]$, onda Riemann-Liouvilleove razlomljene derivacije $D^{\alpha}_{a+}f$ i $D^{\alpha}_{b-}f$ postoje gotovo svuda na $[a,b]$ i mogu se prikazati u obliku*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt,$$

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt.$$

Caputova razlomljena derivacija
Ovaj tip razlomljene derivacije definiran je preko Riemann-Liouvilleove razlomljene derivacije. Neka je $x \in [a,b]$. Za $\alpha \geq 0$ definiramo n sa

$$n = [\alpha]+1, \text{ za } \alpha \notin \mathbb{N}_0; \quad n = \alpha, \text{ za } \alpha \in \mathbb{N}_0. \tag{2.16}$$

Definicija 2.1.10. *Neka je $\alpha \geq 0$, n dan s (2.16) i $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Caputova lijeva razlomljena derivacija ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f$ definirana je s*

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = D^{\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right], \tag{2.17}$$

a Caputova desna razlomljena derivacija ${}^{C}D^{\alpha}_{b-}f$ definirana je s

$${}^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = D^{\alpha}_{b-}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k+1)}(b-x)^k\right], \tag{2.18}$$

Za $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ i f takvu da postoje njene Caputove i Riemann-Liouvilleove razlomljene derivacije reda α vrijedi

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = D^{\alpha}_{a+}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha},$$

$$^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = D^{\alpha}_{b-}f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}.$$

Posebno, za $0 < \alpha < 1$ vrijedi

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = D^{\alpha}_{a+}f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha},$$

$$^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = D^{\alpha}_{b-}f(x) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha},$$

a za $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = f^{(n)}(x), \quad ^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). \tag{2.19}$$

Iz same definicije Caputove razlomljene derivacije lako se vidi da će se za $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ Caputova i Riemann-Liouvilleova razlomljena derivacija podudarati ako iščezavaju derivacije funkcije u rubovima, tj. vrijedi

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = D^{\alpha}_{a+}f(x), \ f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \tag{2.20}$$

$$^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = D^{\alpha}_{b-}f(x), \ f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(n-1)}(b) = 0. \tag{2.21}$$

Teorem 2.1.11. *Neka je $\alpha \geq 0$ i n definiran s (2.16). Ako je $f \in AC^n[a,b]$, onda Caputova lijeva $^{C}D^{\alpha}_{a+}f$ i desna $^{C}D^{\alpha}_{b-}f$ razlomljena derivacija postoje gotovo svuda na $[a,b]$.*

(i) Ako je $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, onda za $^{C}D^{\alpha}_{a+}f$ i $^{C}D^{\alpha}_{b-}f$ vrijedi

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt = J^{n-\alpha}_{a+} f^{(n)}(x), \tag{2.22}$$

$$^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt = (-1)^n J^{n-\alpha}_{b-} f^{(n)}(x). \tag{2.23}$$

Posebno, za $0 < \alpha < 1$ i $f \in AC[a,b]$,

$$^{C}D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)dt = J^{1-\alpha}_{a+} f'(x), \tag{2.24}$$

$$^{C}D^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f'(t)dt = -J^{1-\alpha}_{b-} f'(x). \tag{2.25}$$

(ii) Ako je $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, onda za ${}^C D^n_{a+} f$ i ${}^C D^n_{b-} f$ vrijedi relacija (2.19). Posebno,

$$ {}^C D^0_{a+} f(x) = {}^C D^0_{b-} f(x) = f(x). \tag{2.26} $$

Canavatijeva razlomljena derivacija

Neka je $\alpha > 0$ i $n = [\alpha] + 1$. Definiramo potprostore $C^\alpha_{a+}[a,b]$ i $C^\alpha_{b-}[a,b]$ od $C^{n-1}[a,b]$ s

$$ C^\alpha_{a+}[a,b] = \{ f \in C^{n-1}[a,b] : J^{n-\alpha}_{a+} f^{(n-1)} \in C[a,b] \}, \tag{2.27} $$

$$ C^\alpha_{b-}[a,b] = \{ f \in C^{n-1}[a,b] : J^{n-\alpha}_{b-} f^{(n-1)} \in C[a,b] \}. \tag{2.28} $$

Definicija 2.1.12. *Neka je $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Canavatijeva lijeva razlomljena derivacija ${}^{\bar{C}} D^\alpha_{a+} f$ funkcije $f \in C^\alpha_{a+}[a,b]$ definirana je s*

$$ {}^{\bar{C}} D^\alpha_{a+} f(x) = \frac{d}{dx} J^{n-\alpha}_{a+} f^{(n-1)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n-1)}(t) dt, \tag{2.29} $$

a Canavatijeva desna razlomljena derivacija ${}^{\bar{C}} D^\alpha_{b-} g$ funkcije $g \in C^\alpha_{b-}[a,b]$ definirana je s

$$ {}^{\bar{C}} D^\alpha_{b-} g(x) = (-1)^n \frac{d}{dx} J^{n-\alpha}_{b-} g^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} g^{(n-1)}(t) dt. \tag{2.30} $$

Ako je $0 < \alpha < 1$, onda se Canavatijeva razlomljena derivacija podudara s Riemann-Liouvilleovom, tj. vrijedi

$$ {}^{\bar{C}} D^\alpha_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt = D^\alpha_{a+} f(x), $$

$$ {}^{\bar{C}} D^\alpha_{b-} g(x) = \frac{(-1)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} g(t) dt = D^\alpha_{b-} g(x). $$

Za $\alpha = n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$ {}^{\bar{C}} D^n_{a+} f(x) = f^{(n)}(x), \quad {}^{\bar{C}} D^n_{b-} f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x), $$

dok za $\alpha = 0$ imamo

$$ {}^{\bar{C}} D^0_{a+} f(x) = {}^{\bar{C}} D^0_{b-} f(x) = f(x). $$

Trebat će nam i kompozicijski identiteti za razlomljene derivacije.

Kompozicijski identiteti za razlomljene derivacije

Kompozicijski identitet za razlomljene derivacije, uz $0 \le \alpha < \beta$, glasi

$$ \mathbf{D}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\beta-\alpha-1} \, \mathbf{D}^\alpha f(t) dt, \tag{2.31} $$

gdje jednakost (2.31) vrijedi za sva tri tipa lijevih razlomljenih derivacija, odnosno $\mathbf{D}$ može biti Riemann-Liouvilleova lijeva razlomljena derivacija D, Caputova lijeva razlomljena derivacija ${}^{C}D$ ili Canavatijeva lijeva razlomljena derivacija ${}^{\bar{C}}D$. Slični opći identitet vrijedi za sva tri tipa desnih razlomljenih derivacija.

Sljedeći teorem koji objedinjuje sve uvjete pod kojima vrijedi kompozicijski identitet za Riemann-Liouvilleove lijeve razlomljene derivacije dali su Andrić, Pečarić, Perić u radu [10].

Teorem 2.1.13. *Neka je $0 \leq \alpha < \beta$, $m = [\beta] + 1$ i $n = [\alpha] + 1$. Tada vrijedi kompozicijski identitet*

$$D^{\alpha}_{a+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)} \int_a^x (x - t)^{\beta-\alpha-1} D^{\beta}_{a+} f(t)\, dt\,, \quad x \in [a, b], \tag{2.32}$$

ako je ispunjen jedan od sljedećih uvjeta:

(i) $f \in J^{\beta}_{a+}(L_1[a, b]) = \{f\colon f = J^{\beta}_{a+}\varphi, \varphi \in L_1[a, b]\}$.

(ii) $J^{m-\beta}_{a+} f \in AC^m[a, b]$ *i* $D^{\beta-k}_{a+} f(a) = 0$, *za* $k = 1, \ldots, m$.

(iii) $D^{\beta-1}_{a+} f \in AC[a, b]$, $D^{\beta-k}_{a+} f \in C[a, b]$ *i* $D^{\beta-k}_{a+} f(a) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, m$.

(iv) $f \in AC^m[a, b]$, $D^{\beta}_{a+} f, D^{\alpha}_{a+} f \in L_1[a, b]$, $\beta - \alpha \notin \mathbb{N}$, $D^{\beta-k}_{a+} f(a) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, m$ *i* $D^{\alpha-k}_{a+} f(a) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, n$.

(v) $f \in AC^m[a, b]$, $D^{\beta}_{a+} f, D^{\alpha}_{a+} f \in L_1[a, b]$, $\beta - \alpha = l \in \mathbb{N}$, $D^{\beta-k}_{a+} f(a) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, l$.

(vi) $f \in AC^m[a, b]$, $D^{\beta}_{a+} f, D^{\alpha}_{a+} f \in L_1[a, b]$ *i* $f^{(k)}(a) = 0$ *za* $k = 0, \ldots, m - 2$.

(vii) $f \in AC^m[a, b]$, $D^{\beta}_{a+} f, D^{\alpha}_{a+} f \in L_1[a, b]$, $\beta \notin \mathbb{N}$ *i* $D^{\beta-1}_{a+} f$ *je omeđena u okolini točke* $t = a$.

Naravno, slični teorem vrijedi i za desne Riemann-Liouvilleove razlomljene derivacije.

Teorem 2.1.14. *Neka je $0 \leq \alpha < \beta$, $m = [\beta] + 1$ i $n = [\alpha] + 1$. Tada vrijedi kompozicijski identitet*

$$D^{\alpha}_{b-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha)} \int_x^b (t - x)^{\beta-\alpha-1} D^{\beta}_{b-} f(t)\, dt\,, \quad x \in [a, b], \tag{2.33}$$

ako je ispunjen jedan od sljedećih uvjeta:

(i) $f \in J^{\beta}_{b-}(L_1[a, b]) = \{f\colon f = J^{\beta}_{b-}\varphi, \varphi \in L_1[a, b]\}$.

(ii) $J^{m-\beta}_{b-} f \in AC^m[a, b]$ *i* $D^{\beta-k}_{b-} f(b) = 0$, *za* $k = 1, \ldots, m$.

(iii) $D^{\beta-1}_{b-} f \in AC[a, b]$, $D^{\beta-k}_{b-} f \in C[a, b]$ *i* $D^{\beta-k}_{b-} f(b) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, m$.

(iv) $f \in AC^m[a, b]$, $D^{\beta}_{b-} f, D^{\alpha}_{b-} f \in L_1[a, b]$, $\beta - \alpha \notin \mathbb{N}$, $D^{\beta-k}_{b-} f(b) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, m$ *i* $D^{\alpha-k}_{b-} f(b) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, n$.

(v) $f \in AC^m[a,b]$, $D^{\beta}_{b-}f, D^{\alpha}_{b-}f \in L_1[a,b]$, $\beta - \alpha = l \in \mathbb{N}$, $D^{\beta-k}_{b-}f(b) = 0$ *za* $k = 1, \ldots, l$.

(vi) $f \in AC^m[a,b]$, $D^{\beta}_{b-}f, D^{\alpha}_{b-}f \in L_1[a,b]$ *i* $f^{(k)}(b) = 0$ *za* $k = 0, \ldots, m-2$.

(vii) $f \in AC^m[a,b]$, $D^{\beta}_{b-}f, D^{\alpha}_{b-}f \in L_1[a,b]$, $\beta \notin \mathbb{N}$ *i* $D^{\beta-1}_{b-}f$ *je omeđena u okolini točke* $t = b$.

Sljedeći kompozicijski identiteti za Caputove lijeve, odnosno desne razlomljene derivacije iskazali su u [11].

Teorem 2.1.15. *Neka je* $0 \leq \alpha < \beta$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$, $f \in AC^m[a,b]$ *takva da je* $f^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n, n+1, ..., m-1$. *Nadalje, neka je* ${}^C D^{\beta}_{a+}f, {}^C D^{\alpha}_{a+}f \in L_1[a,b]$. *Tada vrijedi kompozicijski identitet*

$$ {}^C D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\beta-\alpha-1}\, {}^C D^{\beta}_{a+}f(t)\, dt\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{2.34}$$

Teorem 2.1.16. *Neka je* $0 \leq \alpha < \beta$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$, $f \in AC^m[a,b]$ *takva da je* $f^{(i)}(b) = 0$ *za* $i = n, n+1, ..., m-1$. *Nadalje, neka je* ${}^C D^{\beta}_{b-}f, {}^C D^{\alpha}_{b-}f \in L_1[a,b]$. *Tada vrijedi kompozicijski identitet*

$$ {}^C D^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\beta-\alpha-1}\, {}^C D^{\beta}_{b-}f(t)\, dt\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{2.35}$$

Andrić, Pečarić, Perić su iskazali i kompozicijske identitete za lijevu i desnu Canavatijevu razlomljenu derivaciju u [12].

Teorem 2.1.17. *Neka je* $0 < \alpha < \beta$, $m = [\beta]+1$, $n = [\alpha]+1$. *Nadalje, neka je* $f \in C^{\beta}_{a+}[a,b]$ *takva da je* $f^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n-1, n, \ldots, m-2$. *Tada je* $f \in C^{\alpha}_{a+}[a,b]$ *i vrijedi kompozicijski identitet*

$$ {}^{\bar{C}} D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\beta-\alpha-1}\, {}^{\bar{C}} D^{\beta}_{a+}f(t)\, dt\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{2.36}$$

Teorem 2.1.18. *Neka je* $0 < \alpha < \beta$, $m = [\beta]+1$, $n = [\alpha]+1$. *Nadalje, neka je* $f \in C^{\beta}_{b-}[a,b]$ *takva da je* $f^{(i)}(b) = 0$ *za* $i = n-1, n, \ldots, m-2$. *Tada je* $f \in C^{\alpha}_{b-}[a,b]$ *i vrijedi kompozicijski identitet*

$$ {}^{\bar{C}} D^{\alpha}_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\beta-\alpha-1}\, {}^{\bar{C}} D^{\beta}_{b-}f(t)\, dt\,, \quad x \in [a,b]\,. \tag{2.37}$$

Trebat će nam i razlomljeni integral funkcije u odnosu na drugu funkciju i Hadamardov razlomljeni integral (za više detalja vidjeti npr. [26, Poglavlja 2.1, 2.5 i 2.7].

Neka je (a,b), interval u $\mathbb{R}$ i $\alpha > 0$. Nadalje, neka je g rastuća funkcija na (a,b) i g'

neprekidna funkcija na (a,b). Lijevi i desni razlomljeni integral funkcije f u odnosu na funkciju g dani su redom, sa

$$I^{\alpha}_{a+;g}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{g'(t)f(t)dt}{[g(x)-g(t)]^{1-\alpha}}, \quad x > a\,, \tag{2.38}$$

$$I^{\alpha}_{b-;g}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{g'(t)f(t)dt}{[g(t)-g(x)]^{1-\alpha}}, \quad x < b\,, \tag{2.39}$$

gdje je Γ gama funkcija.
Sada ćemo dati primjenu Teorema 2.1.2 na lijeve i desne razlomljene integrale u odnosu na drugu funkciju.

Teorem 2.1.19. *Neka je $\alpha \geq 1$, ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Nadalje, neka je g rastuća funkcija na (a,b) i g' neprekidna funkcija na (a,b). Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]} g'(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^b u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right) f'\left(I^{\alpha}_{a+;g}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{I^{\alpha}_{a+;g}u_1(t)}{I^{\alpha}_{a+;g}u_2(t)}\right|\right)\right) dt \\
\leq\ & f\left(\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]} g'(x)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^b u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right) dt\right) \\
\leq\ & \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(\frac{(b-a)(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]} g'(x)}{\Gamma(\alpha)} u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right) dt.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dokaz. Primijenimo Teorem 2.1.2, gdje funkcije u_i zamijenimo s $I^{\alpha}_{a+;g}u_i$, funkcije v_i zamijenimo s $u_i, i=1,2$, sa sljedećom jezgrom

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{g'(t)}{\Gamma(\alpha)(g(x)-g(t))^{1-\alpha}}, & a < t \leq x\,, \\ 0, & x < t \leq b\,, \end{cases}$$

pa za $\alpha \geq 1$, imamo

$$M = \max K(x,t) = \frac{(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]} g'(x)}{\Gamma(\alpha)}\,.$$

Slijedi nejednakost (2.40).

□

Ako je $g(x)=x$, onda se lijevi razlomljeni integral funkcije f u odnosu na funkciju g, tj. $I^{\alpha}_{a+;g}f(x)$ reducira na $J^{\alpha}_{a+}f(x)$, tj. na lijevi Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral.

Korolar 2.1.20. *Neka je $\alpha \geq 1$, ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right) f'\left(J_{a+}^{\alpha}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{J_{a+}^{\alpha}u_1(t)}{J_{a+}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt\\
&\leq\ f\left(\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)dt\right)\\
&\leq\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right)dt, \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

gdje je $J_{a+}^{\alpha}u(t)$ lijevi Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral funkcije u definiran s (2.12).

Slični rezultat slijedi i za desni razlomljeni integral pa navodimo samo iskaz.

Teorem 2.1.21. *Neka je $\alpha \geq 1$, ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Nadalje, neka je g rastuća funkcija na (a,b) i g' neprekidna funkcija na (a,b). Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]}g'(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right) f'\left(I_{b-;g}^{\alpha}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{I_{b-;g}^{\alpha}u_1(t)}{I_{b-;g}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt\\
&\leq\ f\left(\frac{(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]}g'(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)dt\right)\\
&\leq\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)(g(b)-g(a))^{\alpha-1}\max\limits_{x\in[a,b]}g'(x)}{\Gamma(\alpha)}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right)dt. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

Ako je $g(x)=x$, onda se desni razlomljeni integral funkcije f u odnosu na funkciju g, tj. $I_{b-;g}^{\alpha}f(x)$ reducira na desni Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral.

Korolar 2.1.22. *Neka je $\alpha \geq 1$, ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right) f'\left(J_{b-}^{\alpha}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{J_{b-}^{\alpha}u_1(t)}{J_{b-}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt\\
&\leq\ f\left(\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)dt\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right)dt, \tag{2.43}$$

gdje je $J^\alpha_{b-}u(t)$ desni Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral funkcije u definiran s (2.13).

Neka je (a,b) interval u $\mathbb{R}^+$ i $\alpha > 0$. Lijevi, odnosno desni Hadamardov razlomljeni integral reda α dan je redom, sa

$$H^\alpha_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)dt}{t}, \quad x > a, \tag{2.44}$$

$$H^\alpha_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \left(\ln\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)dt}{t}, \quad x < b. \tag{2.45}$$

Primijetimo da je Hadamardov razlomljeni integral reda α posebni slučaj lijevog, odnosno desnog razlomljenog integrala funkcije f u odnosu na funkciju $g(x) = \ln x$ na (a,b), gdje je $0 \leq a < b \leq \infty$.

Korolar 2.1.23. *Neka je $\alpha \geq 1$, ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)f'\left(H^\alpha_{a+}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{H^\alpha_{a+}u_1(t)}{H^\alpha_{a+}u_2(t)}\right|\right)\right)dt\\
&\leq f\left(\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)dt\right)\\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Slično, možemo dati rezultate za desni razlomljeni integral.

Korolar 2.1.24. *Neka je $\alpha \geq 1$, ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)f'\left(H^\alpha_{b-}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{H^\alpha_{b-}u_1(t)}{H^\alpha_{b-}u_2(t)}\right|\right)\right)dt\\
&\leq f\left(\frac{1}{a\Gamma(\alpha)}(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}\int_a^b u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)dt\right)\\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}}{a\Gamma(\alpha)}u_2(t)\phi\left(\left|\frac{u_1(t)}{u_2(t)}\right|\right)\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Sada ćemo dati primjenu Teorema 2.1.2 na kompozicijski identitet za Riemann-Liouvilleove lijeve razlomljene derivacije dan sa (2.32) koji je ispunjen kada vrijedi jedan od uvjeta danih Teoremom 2.1.13.

Teorem 2.1.25. *Neka je $\alpha + 1 < \beta$ i neka vrijedi jedan od uvjeta Teorema 2.1.13, $D^{\beta}_{a+}u_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^b D^{\beta}_{a+}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D^{\beta}_{a+}u_1(t)}{D^{\beta}_{a+}u_2(t)}\right|\right) f'\left(D^{\alpha}_{a+}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D^{\alpha}_{a+}u_1(t)}{D^{\alpha}_{a+}u_2(t)}\right|\right)\right) dt \\
&\leq f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^b D^{\beta}_{a+}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D^{\beta}_{a+}u_1(t)}{D^{\beta}_{a+}u_2(t)}\right|\right) dt\right) \\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)} D^{\beta}_{a+}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D^{\beta}_{a+}u_1(t)}{D^{\beta}_{a+}u_2(t)}\right|\right)\right) dt,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

gdje je $D^{\alpha}_{a+}u(t)$ Riemann-Liouvilleova lijeva razlomljena derivacija funkcije u, reda α, dana s (2.14).

Dokaz. Primijenimo Teorem 2.1.2, gdje funkcije u_i zamijenimo sa $D^{\alpha}_{a+}u_i$, funkcije v_i zamijenimo sa $D^{\beta}_{a+}u_i, i = 1, 2$ sa jezgrom,

$$K(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-t)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}, & a < t \leq x\,, \\ 0, & x < t \leq b\,. \end{cases}$$

Za $\beta > \alpha + 1$, imamo

$$M = \max K(x,t) = \frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}.$$

Slijedi nejednakosti (2.48).

□

Slijedi primjena Teorema 2.1.2 na kompozicijski identitet za Riemann-Liouvilleove desne razlomljene derivacije dan sa (2.33) koji je ispunjen kada vrijedi jedan od uvjeta danih Teoremom 2.1.14.

Teorem 2.1.26. *Neka je $\alpha + 1 < \beta$ i neka vrijedi jedan od uvjeta Teorema 2.1.14, $D^{\beta}_{a+}u_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$. Ako je f diferencijabilna funkcija, onda vrijedi*

$$\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^b D^{\beta}_{b-}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D^{\beta}_{b-}u_1(t)}{D^{\beta}_{b-}u_2(t)}\right|\right) f'\left(D^{\alpha}_{b-}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D^{\alpha}_{b-}u_1(t)}{D^{\alpha}_{b-}u_2(t)}\right|\right)\right) dt$$

$$\leq f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)dt\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)\right)dt, \tag{2.49}$$

gdje je $D_{b-}^{\alpha}u_(x)$ Riemann-Liouvilleova desna razlomljena derivacija funkcije u, reda α, dana s (2.15).

Sada ćemo dati primjenu Teorema 2.1.2 na kompozicijski identitet za Caputove lijeve razlomljene derivacije dan sa (2.34) koji je ispunjen kada vrijede pretpostavke Teorema 2.1.15.

Teorem 2.1.27. *Neka je $\alpha+1<\beta$ i neka vrijede pretpostavke Teorema 2.1.15, ${}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(x)>0$ za svaki $x\in[a,b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Tada vrijedi*

$$\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_1(t)}{{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)f'\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{a+}^{\alpha}u_1(t)}{{}^{C}D_{a+}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt$$

$$\leq f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_1(t)}{{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)dt\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)}{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_1(t)}{{}^{C}D_{a+}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)\right)dt \tag{2.50}$$

Dokaz. Dokaz ovog teorem je sličan dokazu Teorema 2.1.25. □

Slijedi primjena Teorema 2.1.2 na kompozicijski identitet za Caputove desne razlomljene derivacije dan sa (2.35) koji je ispunjen kada vrijede pretpostavke Teorema 2.1.16.

Teorem 2.1.28. *Neka je $\alpha+1<\beta$ i neka vrijede pretpostavke Teorema 2.1.16, ${}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(x)>0$ za svaki $x\in[a,b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0)=0$. Tada vrijedi*

$$\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)f'\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{b-}^{\alpha}u_1(t)}{{}^{C}D_{b-}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt$$

$$\leq f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)dt\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)}{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{{}^{C}D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)\right)dt \tag{2.51}$$

Sada ćemo dati primjenu Teorema 2.1.2 na kompozicijski identitet za Canavatijeve lijeve razlomljene derivacije dan sa (2.36) koji je ispunjen kada vrijede pretpostavke Teorema 2.1.17.

Teorem 2.1.29. *Neka je $\beta > \alpha + 1$ i neka vrijede pretpostavke Teorema 2.1.17, ${}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$. Tada vrijedi*

$$\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(t)}\right|\right) f'\left({}^{\bar{C}}D_{a+}^{\alpha}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\alpha}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt$$

$$\leq f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)dt\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)}{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{a+}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)\right)dt. \tag{2.52}$$

Dokaz. Dokaz ovog teorema je sličan dokazu Teorema 2.1.25.

□

Slijedi primjena Teorema 2.1.2 na kompozicijski identitet za Canavatijeve desne razlomljene derivacije dan sa (2.37) koji je ispunjen kada vrijede pretpostavke Teorema 2.1.18.

Teorem 2.1.30. *Neka je $\beta > \alpha + 1$ i neka vrijede pretpostavke Teorema 2.1.18, ${}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(x) > 0$ za svaki $x \in [a,b]$. Nadalje, neka je ϕ konveksna, nenegativna i rastuća funkcija na $[0,\infty)$ i neka je f konveksna funkcija na $[0,\infty)$ za koju vrijedi $f(0) = 0$. Tada vrijedi*

$$\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right) f'\left({}^{\bar{C}}D_{b-}^{\alpha}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\alpha}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\alpha}u_2(t)}\right|\right)\right)dt$$

$$\leq f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^b {}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)dt\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)}{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(t)\,\phi\left(\left|\frac{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_1(t)}{{}^{\bar{C}}D_{b-}^{\beta}u_2(t)}\right|\right)\right)dt. \tag{2.53}$$

2.2. Nejednakosti Opialova tipa za relativno konveksne funkcije

U ovom potpoglavlju promatramo još neke nejednakosti Opialova tipa koje su dokazali Mitrinović i Pečarić (vidjeti [2, str. 90. i 180.], [31] i [32]). No, prije toga definirajmo relativno konveksne funkcije.

Definicija 2.2.1. *Neka je g strogo monotona funkcija. Kažemo da je funkcija f (strogo) konveksna u odnosu na g ako je funkcija $f \circ g^{-1}$ (strogo) konveksna. Funkciju f još kratko nazivamo relativno konveksnom.*

U sljedećim rezultatima će se promatrati funkcije koje su konveksne u odnosu na potenciju, pa zato uvodimo ovu oznaku:

$$e_r(x) = x^r.$$

Trebat će nam i definicija posebne klase funkcija. Neka je u klase $U(v, K)$, gdje je $K(x,t) = 0$, za $t > x$. Takve funkcije pripadaju klasi koju ćemo označavati s $U_1(v, K)$. Jasno je da tada za funkciju u vrijedi

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)v(t)dt.$$

Slično, kažemo da je funkcija $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ klase $U_2(v, K)$ ako se može prikazati kao

$$u(x) = \int_x^b K(x,t)v(t)\,dt,$$

gdje je v neprekidna funkcija i K proizvoljna nenegativna jezgra takva da $v(x) > 0$ povlači $u(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$.
Slijede tri Mitrinović-Pečarićeve nejednakosti.

Teorem 2.2.2. *Neka je $u \in C^{n-1}[a, b]$ takva da je $u^{(i)}(a) = 0$, $0 \le i \le n-1$ $(n \ge 1)$, $u^{(n-1)}$ apsolutno neprekidna i $\int_a^b |u^{(n)}(t)|^q\,dt < \infty$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |u(t)|^p |u^{(n)}(t)|^q\,dt \\
&\le \frac{q}{p+q}\left[\frac{(b-a)^{n-\frac{1}{q}}}{(n-1)!}\left(\frac{q-1}{nq-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\right]^p \left(\int_a^b |u^{(n)}(t)|^q\,dt\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\le \frac{q}{p+q}\left[\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{q-1}{nq-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\right]^p (b-a)^{np}\int_a^b |u^{(n)}(t)|^{p+q}\,dt\,. \qquad (2.54)
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.3. *Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Neka je u klase $U_1(v,K)$ gdje je $\left(\int_a^x (K(x,t))^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 1$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b |u(x)|^{1-q} \phi'(|u(x)|)|v(x)|^q\, dx \;\leq\; \frac{q}{M^q}\, \phi\Big(M\Big(\int_a^b |v(x)|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big). \tag{2.55}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.55) vrijedi suprotna nejednakost.

Teorem 2.2.4. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, takva da je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je u klase $U_2(v,K)$ gdje je $\left(\int_x^b (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq N$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b |u(x)|^{1-q} \phi'(|u(x)|)|v(x)|^q\, dx \;\leq\; \frac{q}{N^q}\, \phi\Big(N\Big(\int_a^b |v(x)|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big). \tag{2.56}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.56) vrijede suprotne nejednakosti.

Proširimo nejednakosti (2.55) i (2.56), te ih iskoristimo za dobivanje poopćenja Mitrinović-Pečarićeve nejednakosti (2.54).

Teorem 2.2.5. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, takva da je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je funkcija u klase $U_1(v,K)$, gdje je $\left(\displaystyle\int_a^x (K(x,t))^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} &\int_a^b |u(x)|^{1-q}\, \phi'(|u(x)|)|v(x)|^q\, dx \\ &\leq\; \frac{q}{M^q}\, \phi\Big(M\Big(\int_a^b |v(x)|^q\, dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) \qquad (2.57) \\ &\leq\; \frac{q}{M^q\,(b-a)} \int_a^b \phi\left(M(b-a)^{\frac{1}{q}}|v(x)|\right) dx\,. \qquad (2.58) \end{aligned}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.58) vrijede suprotne nejednakosti.

Dokaz. Nejednakost (2.57) vrijedi po Teoremu 2.2.3. Budući da je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna, vrijedi sljedeća Jensenova nejednakost

$$\phi\Big(\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\, dt\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(g^{\frac{1}{q}}(t)\right) dt\,. \tag{2.59}$$

Primjenom (2.59) na (2.57) dobivamo (2.58). $\square$

Ukoliko je $\phi(x) = x^{p+q}$, imamo sljedeći poseban slučaj.

Korolar 2.2.6. *Neka je u klase* $U_1(v,K)$ *gdje je* $\left(\int_a^x (K(x,t))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$, $p,q>1$ *i* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x)|^p |v(x)|^q\,dx &\leq \frac{q\,M^p}{p+q}\left(\int_a^b |v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\ &\leq \frac{q\,M^p(b-a)^{\frac{p}{q}}}{p+q}\int_a^b |v(x)|^{p+q}\,dx\,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Napomena 2.2.7. Ako uzmemo da je $v(x) = u^{(n)}(x)$ u (2.60), onda dobijemo poopćenje Mitrinović-Pečarićeve nejednakosti (2.54) za $M = \frac{(b-a)^{n-\frac{1}{q}}}{(n-1)!}\left(\frac{q-1}{nq-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}$.

Sljedeći rezultati su dobiveni proširenjem nejednakosti (2.56).

Teorem 2.2.8. *Neka su* $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Neka je* $\phi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *diferencijabilna funkcija takva da je funkcija* $\phi\circ e_{\frac{1}{q}}$ *konveksna i* $\phi(0)=0$. *Nadalje, neka je u klase* $U_2(v,K)$, *gdje je* $\left(\int_x^b (K(x,t))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq N$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x)|^{1-q}\phi'(|u(x)|)|v(x)|^q dx &\leq \frac{q}{N^q}\,\phi\Big(N\Big(\int_a^b |v(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) \\ &\leq \frac{q}{N^q(b-a)}\int_a^b \phi\left(N(b-a)^{\frac{1}{q}}|v(x)|\right)dx\,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Ako je funkcija $\phi\circ e_{\frac{1}{q}}$ *konkavna, onda u* (2.61) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Dokaz. Kao u dokazu prethodnog teorema, nejednakost slijedi iz Teorema 2.2.3 i Jensenove nejednakosti (2.59). □

Korolar 2.2.9. *Neka je u klase* $U_2(v,K)$ *gdje je* $\left(\int_x^b (K(x,t))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq N$, $p,q>1$ *i* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \int_a^b |u(x)|^p |v(x)|^q\,dx &\leq \frac{q\,N^p}{p+q}\left(\int_a^b |v(x)|^q\,dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\ &\leq \frac{q\,N^p(b-a)^{\frac{p}{q}}}{p+q}\int_a^b |v(x)|^{p+q}\,dx\,. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Napomena 2.2.10. Ako uzmemo da je $v(x) = u^{(n)}(x)$ i $N = \frac{(b-a)^{n-\frac{1}{q}}}{(n-1)!}\left(\frac{q-1}{nq-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}$, iz (2.62) slijedi (2.54).

2.2.1. Primjena na razlomljene integrale i razlomljene derivacije

Prvi rezultat se temelji na Teoremu 2.2.5 i Riemann-Liouvilleovom lijevom razlomljenom integralu definiranom s (2.12).

Teorem 2.2.11. *Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je $\alpha > \frac{1}{q}$ i $v \in L_1[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|J_{a+}^{\alpha} v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|J_{a+}^{\alpha} v(x)\right|\right) |v(x)|^q \, dx \\
&\le \frac{q\,\Gamma^q(\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q\alpha-1}} \phi\left(\frac{(b-a)^{\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b |v(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\le \frac{q\,\Gamma^q(\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q\alpha}} \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\alpha} |v(x)|}{\Gamma(\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \right) dx\,.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.63) vrijedi suprotna nejednakost.

Dokaz. Za $x \in [a,b]$ neka je

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-t)^{\alpha-1}, & a \le t \le x\,, \\ 0, & x < t \le b\,, \end{cases}$$

$$u(x) = J_{a+}^{\alpha} v(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} v(t)\, dt\,, \tag{2.64}$$

$$P(x) = \left(\int_a^x (K(x,t))^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{(x-a)^{\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\alpha)\left[p\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Lako se vidi da je za $\alpha > \frac{1}{q}$ funkcija P rastuća na $[a,b]$, dakle vrijedi

$$\max_{x\in[a,b]} P(x) = \frac{(b-a)^{\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} = M\,.$$

Budući da je $\left(\int_a^x K(x,t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le M$, gdje je funkcija u definirana sa (2.64), iz Teorema 2.2.5 slijedi (2.63). □

Korolar 2.2.12. *Neka je $\alpha > \frac{1}{q}$ i $v \in L_1[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|J_{a+}^{\alpha} v(x)\right|^p |v(x)|^q \, dx &\le \frac{q\,(b-a)^{p\left(\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\alpha)\, p\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)} \left(\int_a^b |v(x)|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\le \frac{q\,(b-a)^{p\alpha}}{(p+q)\,\Gamma^p(\alpha)\, p\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)} \int_a^b |v(x)|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}$$

Slični rezultati, bez dokaza, slijede za Riemann-Liouvilleov desni razlomljeni integral.

Teorem 2.2.13. *Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je $\alpha > \frac{1}{q}$ i $v \in L_1[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|J_{b-}^{\alpha} v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|J_{b-}^{\alpha} v(x)\right|\right) |v(x)|^q \, dx \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q\alpha-1}} \phi\left(\frac{(b-a)^{\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q\alpha}} \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\alpha}|v(x)|}{\Gamma(\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \right) dx\,. \qquad (2.65)
\end{aligned}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.65) *vrijedi suprotna nejednakost.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teorema 2.2.11. □

Korolar 2.2.14. *Neka je $\alpha > \frac{1}{q}$ i $v \in L_1[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left|J_{b-}^{\alpha} v(x)\right|^p |v(x)|^q \, dx &\leq \frac{q\,(b-a)^{p\left(\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\alpha)\, p\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)} \left(\int_a^b |v(x)|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p\alpha}}{(p+q)\,\Gamma^p(\alpha)\, p\left(\alpha - \frac{1}{q}\right)} \int_a^b |v(x)|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}$$

Sada promatramo Caputove lijeve i desne razlomljene derivacije definirane s (2.17) i (2.18).

Teorem 2.2.15. *Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka $\alpha \geq 0$, n dan sa* (2.16) *i $v \in AC^n[a,b]$. Ako je $n - \alpha > \frac{1}{q}$, onda vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^C D_{a+}^{\alpha} v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|{}^C D_{a+}^{\alpha} v(x)\right|\right) \left|v^{(n)}(x)\right|^q dx \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(n-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(n-\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q(n-\alpha)-1}} \\
&\quad \cdot \phi\left(\frac{(b-a)^{n-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(n-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(n-\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b \left|v^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(n-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(n-\alpha - \frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q(n-\alpha)}}
\end{aligned}$$

$$\cdot \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{n-\alpha}\left|v^{(n)}(x)\right|}{\Gamma(n-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}}\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right) dx\,. \tag{2.66}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.66) vrijedi suprotna nejednakost.

Dokaz. Za $x \in [a,b]$ neka je

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(x-t)^{n-\alpha-1}, & a \leq t \leq x\,, \\ 0, & x < t \leq b\,, \end{cases}$$

$$u(x) = {}^{C}D^{\alpha}_{a+}v(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} v^{(n)}(t)\,dt\,, \tag{2.67}$$

$$Q(x) = \left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{(x-a)^{n-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(n-\alpha)\left[p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Za $n-\alpha > \frac{1}{q}$ funkcija Q je rastuća na $[a,b]$, dakle

$$\max_{x\in[a,b]} Q(x) = \frac{(b-a)^{n-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(n-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}}\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} = M\,.$$

Budući da je $\left(\int_a^x K(x,t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$, zajedno sa $v = u^{(n)}$, u kao u (2.67), primjenom Teorema 2.2.5 dobivamo (2.66). □

Korolar 2.2.16. *Neka je $\alpha \geq 0$, n dan sa (2.16) i $v \in AC^n[a,b]$. Ako je $n-\alpha > \frac{1}{q}$, onda vrijedi*

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left|{}^{C}D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|^p \left|v^{(n)}(x)\right|^q dx \\ &\leq \frac{q\,(b-a)^{p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(n-\alpha)\, p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^b \left|v^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\ &\leq \frac{q\,(b-a)^{p(n-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(n-\alpha)\, p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\int_a^b \left|v^{(n)}(x)\right|^{p+q} dx\,. \end{aligned}$$

Teorem 2.2.17. *Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je $\alpha \geq 0$, n dan sa (2.16) i $v \in AC^n[a,b]$. Tada za svaki parni n takav da je $n-\alpha > \frac{1}{q}$, vrijedi*

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left|{}^{C}D^{\alpha}_{b-}v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|{}^{C}D^{\alpha}_{b-}v(x)\right|\right) \left|v^{(n)}(x)\right|^q dx \\ &\leq \frac{q\,\Gamma^q(n-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}}\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q(n-\alpha)-1}} \end{aligned}$$

$$\cdot\,\phi\left(\frac{(b-a)^{n-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(n-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b\left|v^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq\ \frac{q\,\Gamma^q(n-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q(n-\alpha)}}$$

$$\cdot\int_a^b\phi\left(\frac{(b-a)^{n-\alpha}\left|v^{(n)}(x)\right|}{\Gamma(n-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)dx\,. \tag{2.68}$$

Ako je funkcija $\phi\circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.68) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teorema 2.2.15. □

Korolar 2.2.18. *Neka je $\alpha\geq 0$, n dan sa* (2.16) *i $v\in AC^n[a,b]$. Tada za svaki parni n takav da je $n-\alpha>\frac{1}{q}$, vrijedi*

$$\int_a^b\left|{}^C D_{b-}^{\alpha}v(x)\right|^p\left|v^{(n)}(x)\right|^q dx$$

$$\leq\ \frac{q\,(b-a)^{p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(n-\alpha)\,p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^b\left|v^{(n)}(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}}$$

$$\leq\ \frac{q\,(b-a)^{p(n-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(n-\alpha)\,p\left(n-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\int_a^b\left|v^{(n)}(x)\right|^{p+q}dx\,.$$

U sljedećem Teoremu koristimo kompozicijski identitet za Caputove lijeve razlomljene derivacije dan u Teoremu 2.1.15.

Teorem 2.2.19. *Neka je $\phi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je za $q>1$ funkcija $\phi\circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0)=0$. Nadalje, neka je $\beta-\alpha>\frac{1}{q}$, $\alpha\geq 0$, m i n dani sa* (2.16) *za redom β i α, $v\in AC^m[a,b]$ takva da je $v^{(i)}(a)=0$ za $i=n,n+1,...,m-1$, ${}^C D_{a+}^{\beta}v\in L_q[a,b]$ i ${}^C D_{a+}^{\alpha}v\in L_1[a,b]$. Tada vrijedi*

$$\int_a^b\left|{}^C D_{a+}^{\alpha}v(x)\right|^{1-q}\phi'\left(\left|{}^C D_{a+}^{\alpha}v(x)\right|\right)\left|{}^C D_{a+}^{\beta}v(x)\right|^q dx$$

$$\leq\ \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)-1}}$$

$$\cdot\,\phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b\left|{}^C D_{a+}^{\beta}v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

$$\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{q}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}$$
$$\cdot\int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}\left|{}^CD^\beta_{a+}v(x)\right|}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right)dx\,. \tag{2.69}$$

Ako je funkcija $\phi\circ e_{\frac{1}{q}}$ *konkavna, onda u* (2.69) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Dokaz. Za $x\in[a,b]$ neka je

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-t)^{\beta-\alpha-1}, & a\leq t\leq x\,,\\ 0, & x<t\leq b\,,\end{cases}$$

$$u(x)={}^CD^\alpha_{a+}v(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\beta-\alpha-1}\,{}^CD^\beta_{a+}v(t)\,dt\,, \tag{2.70}$$

$$R(x)=\left(\int_a^x(K(x,t))^pdt\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{(x-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Za $\beta-\alpha>\frac{1}{q}$ funkcija R je rastuća na $[a,b]$, dakle

$$\max_{x\in[a,b]}R(x)=\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}=M\,.$$

Budući da je $\left(\int_a^x K(x,t)^pdt\right)^{\frac{1}{p}}\leq M$, sa $v=u^{(n)}$, u kao u (2.70), iz Teorema 2.2.5 slijedi (2.69). □

Korolar 2.2.20. *Neka je* $\beta-\alpha>\frac{1}{q}$, $\alpha\geq 0$, m *i* n *dani sa* (2.16) *za redom* β *i* α. *Nadalje, neka je* $v\in AC^m[a,b]$ *takva da je* $v^{(i)}(a)=0$ *za* $i=n,n+1,...,m-1$, ${}^CD^\beta_{a+}v\in L_{p+q}[a,b]$ *i* ${}^CD^\alpha_{a+}v\in L_1[a,b]$. *Tada vrijedi*

$$\int_a^b\left|{}^CD^\alpha_{a+}v(x)\right|^p\left|{}^CD^\beta_{a+}v(x)\right|^q dx$$
$$\leq \frac{q\,(b-a)^{p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^b\left|{}^CD^\beta_{a+}v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}}$$
$$\leq \frac{q\,(b-a)^{p(\beta-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\int_a^b\left|{}^CD^\beta_{a+}v(x)\right|^{p+q}dx\,.$$

Sljedeći rezultat koji slijedi koristi kompozicijski identitet za desne Caputove razlomljene derivacije iz Teorema 2.1.16.

Teorem 2.2.21. *Neka je $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija, takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, m i n dani sa (2.16), redom za β i α, $v \in AC^m[a,b]$, takva da je $v^{(i)}(b) = 0$ za $i = n, n+1, ..., m-1$, ${}^C D_{b-}^{\beta} v \in L_q[a,b]$ i ${}^C D_{b-}^{\alpha} v \in L_1[a,b]$. Tada za parne n i m vrijedii*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^C D_{b-}^{\alpha} v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|{}^C D_{b-}^{\alpha} v(x)\right|\right) \left|{}^C D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)-1}} \\
&\quad \cdot \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b \left|{}^C D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}} \\
&\quad \cdot \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha} \left|{}^C D_{b-}^{\beta} v(x)\right|}{\Gamma(\beta-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \right) dx\,. \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.71) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teorema 2.2.19. □

Korolar 2.2.22. *Neka je $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, m i n dani sa* (2.16) *redom, za β i α. Nadalje, neka je $v \in AC^m[a,b]$ takva da je $v^{(i)}(b) = 0$ za $i = n, n+1, ..., m-1$, ${}^C D_{b-}^{\beta} v \in L_{p+q}[a,b]$ i ${}^C D_{b-}^{\alpha} v \in L_1[a,b]$. Tada za parne n i m vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^C D_{b-}^{\alpha} v(x)\right|^p \left|{}^C D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\, p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)} \left(\int_a^b \left|{}^C D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx \right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p(\beta-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\, p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)} \int_a^b \left|{}^C D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}
$$

Rezultati dani Teoremima i Korolarima 2.2.15–2.2.22 se mogu slično dokazati za razlomljene derivacije Riemann-Liouvilleovog i Canavatijevog tipa. Iznijet ćemo samo kompozicijske identitete za lijeve i desne razlomljene derivacije Riemann-Liouvilleovog i Canavatijevog tipa.

Sljedeća dva rezultata dobivena su korištenjem kompozicijskog identiteta za Canavatijeve lijeve razlomljene derivacije dane Teoremom 2.1.17.

Teorem 2.2.23. *Neka je* $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna funkcija takva da je za* $q > 1$ *funkcija* $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ *konveksna i* $\phi(0) = 0$. *Nadalje, neka je* $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$, $v \in C^{\beta}_{a+}[a,b]$ *takva da je* $v^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n-1, n, ..., m-2$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|\right) \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)-1}} \\
&\quad \cdot \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}} \\
&\quad \cdot \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}\left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)\right|}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right) dx\,. \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ *konkavna, onda u* (2.72) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Korolar 2.2.24. *Neka je* $\beta-\alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$. *Nadalje, neka je* $v \in C^{\beta}_{a+}[a,b]$, *takva da je* $v^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n-1, n, ..., m-2$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v \in L_{p+q}[a,b]$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|^p \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p(\beta-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}$$

Sljedeća dva rezultata dobivena su korištenjem kompozicijskog identiteta za Canavatijeve desne razlomljene derivacije dane Teoremom 2.1.18.

Teorem 2.2.25. *Neka je* $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna funkcija takva da je za* $q > 1$ *funkcija* $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ *konveksna i* $\phi(0) = 0$. *Nadalje, neka je* $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$, $v \in C^{\beta}_{b-}[a,b]$ *takva da je* $v^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n-1, n, ..., m-2$,

${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v \in L_q[a,b]$. *Tada vrijede nejednakosti*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v(x)\right|\right) \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)\right|^{q} dx \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)-1}} \\
&\quad \cdot \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)\right|^{q} dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leq \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}} \\
&\quad \cdot \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}\left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)\right|}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right) dx\,.
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ *konkavna, onda u* (2.73) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Korolar 2.2.26. *Neka je* $\beta-\alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$. *Nadalje, neka je* $v \in C^{\beta}_{b-}[a,b]$, *takva da je* $v^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n-1, n, ..., m-2$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v \in L_{p+q}[a,b]$. *Tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v(x)\right|^{p} \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)\right|^{q} dx \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)\right|^{q} dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\leq \frac{q\,(b-a)^{p(\beta-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\int_a^b \left|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)\right|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}
$$

Za sljedeće rezultate o Riemann-Liouvilleovim lijevim razlomljenim derivacijama koristimo kompozicijski identitet iz Teorema 2.1.13.

Teorem 2.2.27. *Neka je* $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *diferencijabilna funkcija takva da je za* $q > 1$ *funkcija* $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ *konveksna i* $\phi(0) = 0$. *Nadalje, neka je* $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ *i* $n = [\alpha]+1$, *te neka je ispunjen jedan od uvjeta* $(i)-(vii)$ *iz Teorema 2.1.13 za* β, α, v *te neka je* $D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$. *Tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|\right) \left|D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx \\
&\leq \quad \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)-1}} \\
&\qquad \cdot \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b \left|D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\leq \quad \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\,p^{\frac{q}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}} \\
&\qquad \cdot \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}\left|D^{\beta}_{a+}v(x)\right|}{\Gamma(\beta-\alpha)\,p^{\frac{1}{p}}\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right) dx\,. \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.74) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Korolar 2.2.28. *Neka je $\beta-\alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ i $n = [\alpha]+1$. Nadalje, neka je ispunjen jedan od uvjeta $(i)-(vii)$ iz Teorema 2.1.13 za β, α, v i neka je $D^{\beta}_{a+}v \in L_{p+q}[a,b]$. Tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|D^{\alpha}_{a+}v(x)\right|^p \left|D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx \\
&\leq \quad \frac{q\,(b-a)^{p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_a^b \left|D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
&\leq \quad \frac{q\,(b-a)^{p(\beta-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\,p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}\int_a^b \left|D^{\beta}_{a+}v(x)\right|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}
$$

Za sljedeće rezultate o Riemann-Liouvilleovim desnim razlomljenim derivacijama koristimo kompozicijski identitet iz Teorema 2.1.14.

Teorem 2.2.29. *Neka je $\phi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija takva da je za $q > 1$ funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna i $\phi(0) = 0$. Nadalje, neka je $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ i $n = [\alpha]+1$, te neka je ispunjen jedan od uvjeta $(i)-(vii)$ iz Teorema 2.1.14 za β, α, v te neka je $D^{\beta}_{b-}v \in L_q[a,b]$. Tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|D_{b-}^{\alpha} v(x)\right|^{1-q} \phi'\left(\left|D_{b-}^{\alpha} v(x)\right|\right) \left|D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx \\
\leq\ & \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)-1}} \\
&\cdot \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b \left|D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \frac{q\,\Gamma^q(\beta-\alpha)\, p^{\frac{q}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}} \\
&\cdot \int_a^b \phi\left(\frac{(b-a)^{\beta-\alpha}\left|D_{b-}^{\beta} v(x)\right|}{\Gamma(\beta-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}}\right) dx\,. \qquad (2.75)
\end{aligned}
$$

Ako je funkcija $\phi \circ e_{\frac{1}{q}}$ konkavna, onda u (2.75) *vrijede suprotne nejednakosti.*

Korolar 2.2.30. *Neka je $\beta-\alpha > \frac{1}{q}$, $\alpha \geq 0$, $m = [\beta]+1$ i $n = [\alpha]+1$. Nadalje, neka je ispunjen jedan od uvjeta (i) – (vii) iz Teorema 2.1.14 za β, α, v i neka je $D_{b-}^{\beta} v \in L_{p+q}[a,b]$. Tada vrijedi*

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left|D_{b-}^{\alpha} v(x)\right|^p \left|D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx \\
\leq\ & \frac{q\,(b-a)^{p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\, p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)} \left(\int_a^b \left|D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^q dx\right)^{\frac{p+q}{q}} \\
\leq\ & \frac{q\,(b-a)^{p(\beta-\alpha)}}{(p+q)\,\Gamma^p(\beta-\alpha)\, p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)} \int_a^b \left|D_{b-}^{\beta} v(x)\right|^{p+q} dx\,.
\end{aligned}
$$

2.3. Svojstva funkcionala izvedenih iz nejednakosti Mitrinović-Pečarićevog tipa

Motivirani nejednakošću (2.58) definiramo funkcional:

$$
\begin{aligned}
\Psi_\phi(u,v) &= \frac{q}{M^q\,(b-a)} \int_a^b \phi\left(M(b-a)^{\frac{1}{q}}|v(x)|\right) dx \\
&\quad - \int_a^b |u(x)|^{1-q}\, \phi'(|u(x)|)|v(x)|^q\, dx\,, \qquad (2.76)
\end{aligned}
$$

gdje je u klase $U_1(v,K)$ te gdje je $\left(\int_a^x (K(x,t))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$, $p,q>1$ i $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\phi:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ diferencijabilna sa svojstvom $\phi(0)=0$.

Neka je v ograničena na $[a,b]$, tj. $|v(x)|\leq W$ za $x\in[a,b]$. Tada je

$$M(b-a)^{\frac{1}{q}}|v(x)| \leq WM(b-a)^{\frac{1}{q}}$$

i

$$|u(x)| = \left|\int_a^x K(x,t)v(t)dt\right| \leq W\int_a^x K(x,t)dt \leq WM.$$

Uvedimo oznaku

$$\delta = \max\{WM, WM(b-a)^{\frac{1}{q}}\}. \tag{2.77}$$

Teorem 2.3.1. *Neka su $p,q>1$ takvi da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Neka je funkcija u klase $U_1(v,K)$ gdje je $\left(\int_a^x (K(x,t))^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$ i $|v(x)|\leq W$ na $[a,b]$. Nadalje, neka je $\phi:[0,\delta]\to\mathbb{R}$ takva da je $\phi\circ e_{\frac{1}{q}}\in C^2[0,\delta^q]$ i $\phi(0)=0$. Tada postoji $\xi\in[0,\delta]$ takav da je*

$$\begin{aligned}\Psi_\phi(u,v) \;=\;& \frac{\xi\,\phi''(\xi)-(q-1)\,\phi'(\xi)}{2\,q\,\xi^{2q-1}} \\ &\cdot\left(M^q(b-a)\int_a^b |v(x)|^{2q}\,dx - 2\int_a^b |u(x)|^q\,|v(x)|^q\,dx\right).\end{aligned} \tag{2.78}$$

Dokaz. Budući da je $\varphi=\phi\circ e_{\frac{1}{q}}$ klase C^2, postoje postoje $\bar{m}$ i $\bar{M}$ takvi da je

$$\bar{m} = \min_{x\in[0,\delta^2]}\varphi''(x) = \min_{t\in[0,\delta]}\frac{t\phi''(t)-(q-1)\phi'(t)}{q^2t^{2q-1}},$$

$$\bar{M} = \max_{x\in[0,\delta^2]}\varphi''(x) = \max_{t\in[0,\delta]}\frac{t\phi''(t)-(q-1)\phi'(t)}{q^2t^{2q-1}}$$

i $Im\varphi''=[\bar{m},\bar{M}]$.
Definirajmo funkciju ϕ_1 ovako:

$$\phi_1(x) = \frac{\bar{M}x^{2q}}{2}-\phi(x), \quad x\in[0,\delta].$$

Tada je $\varphi_1=\phi_1\circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna na $[0,\delta^q]$ jer

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \phi_1(e_{\frac{1}{q}}(x)) = \frac{\bar{M}x^2}{2}-\phi(x^{\frac{1}{q}}),\\ \varphi'(x) &= \bar{M}x-\frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}\phi'(x^{\frac{1}{q}}),\\ \varphi''(x) &= \bar{M}-\frac{1}{q^2x^{\frac{2q-1}{q}}}\left(x^{\frac{1}{q}}\phi''(x^{\frac{1}{q}})+(1-q)\phi'(x^{\frac{1}{q}})\right)\geq 0.\end{aligned}$$

Analogno, za funkciju ϕ_2 definiranu s

$$\phi_2(x) = \phi(x) - \frac{\bar{m}x^{2q}}{2}$$

imamo da je $\phi_2 \circ e_{\frac{1}{q}}$ konveksna.
Primjenimo li Teorem 2.2.3 na funkciju ϕ_1 dobivamo

$$\frac{q}{M^q(b-a)} \int_a^b \phi_1 \left(M(b-a)^{\frac{1}{q}|v(x)|} \right) dx \geq \int_a^b |u(x)|^{1-q} \phi_1'(|u(x)|)|v(x)|^q dx,$$

odakle uvrštavanjem izraza za ϕ_1 dobivamo

$$\begin{aligned} v\frac{q}{M^q(b-a)} \int_a^b \phi \left(M(b-a)^{\frac{1}{q}|v(x)|} \right) dx - \int_a^b |u(x)|^{1-q} \phi'(|u(x)|)|v(x)|^q dx \\ \leq \bar{M}\frac{q}{2} \left(M^q(b-a) \int_a^b |v(x)|^{2q} dx - 2 \int_a^b |u(x)|^q |v(x)|^q dx \right), \end{aligned}$$

tj.

$$\Phi_\varphi(u,v) \leq \bar{M}\frac{q}{2}A,$$

gdje je

$$A = M^q(b-a) \int_a^b |v(x)|^{2q} dx - 2 \int_a^b |u(x)|^q |v(x)|^q dx. \tag{2.79}$$

Ako je $A = 0$ tvrdnja teorema je istinita, a ako je $A \neq 0$ onda po Bolzano-Weierstrassovom teoremu postoji $t \in [0, \delta^q]$ takav da je

$$\Phi_\varphi(u,v) = \varphi''(t)\frac{q}{2}A,$$

tj. uz oznaku $\xi = t^{\frac{1}{q}}$ vrijedi

$$\Phi_\varphi(u,v) = \frac{\xi\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}A$$

čime je teorem dokazan. □

Teorem 2.3.2. *Neka u, v zadovoljavaju pretpostavke Teorema 2.3.1. Nadalje, neka su $\phi_1, \phi_2 : [0, \beta] \to \mathbb{R}$ takve da su $\phi_1 \circ e_{\frac{1}{q}}$, $\phi_2 \circ e_{\frac{1}{q}}$ klase $C^2[0, \delta^q]$, $\phi_1(0) = 0$, $\phi_2(0) = 0$, te neka je $A \neq 0$, gdje je A definiran s* (2.79)*. Tada postoji $\xi \in [0, \delta]$ takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}(u,v)}{\Psi_{\phi_2}(u,v)} = \frac{\xi\, \phi_1''(\xi) - (q-1)\, \phi_1'(\xi)}{\xi\, \phi_2''(\xi) - (q-1)\, \phi_2'(\xi)}\,, \tag{2.80}$$

gdje su nazivnici različiti od nula.

Dokaz. Promotrimo funkciju h definiranu s

$$h = \Psi_{\phi_2}(u,v)\, \phi_1 - \Psi_{\phi_1}(u,v)\, \phi_2\,.$$

Funkcija h je linearna kombinacija funkcija $\phi_1, \phi_2 \in C^2[0,\delta]$, pa vrijedi $h \in C^2[0,\delta]$. Iz uvjeta $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$, slijedi da je $h(0) = 0$. Sada možemo primjeniti Teorem 2.3.1 na funkciju h. Slijedi da postoji $\xi \in I$ takav da je

$$\left(\Psi_{\phi_2}(u,v)\frac{\xi\phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{2\,q\,\xi^{2q-1}} - \Psi_{\phi_1}(u,v)\frac{\xi\phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)}{2\,q\,\xi^{2q-1}}\right)$$
$$\cdot\left(M^q(b-a)\int_a^b |v(x)|^{2q}\,dx - 2\int_a^b |u(x)|^q|v(x)|^q dx\right) = \Psi_h(u,v). \quad (2.81)$$

Iz svojstava linearnog funkcionala vrijedi $\Psi_h(u,v) = 0$. Sada jednostavnim računom, uz pretpostavku da je $A \neq 0$ iz (2.81) dobivamo (2.80). □

Napomena 2.3.3. Promatranjem nenegativne razlike nejednakosti dane u Teoremu 2.2.4, analogno se dobije slični rezultat (vidjeti [24] za detalje).

U ovom pododjeljku ćemo dati primjenu novih rezultata danih Teoremima 2.3.1 i 2.3.2 na razlomljeni Riemann-Liouvilleov integral i razlomljene derivacije Riemann-Liouvilleovog, Caputovog i Canavatijevog tipa.

Neka su $p, q > 1$, $\alpha > \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nadalje, neka su $K(x,t)$, funkcije u, v, P te M kao u dokazu Teorema 2.2.11. Neka je v ograničena na $[a,b]$, tj. $|v(x)| \le W$ za $x \in [a,b]$. Tada vrijedi $\left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le M$. Definiramo δ kao u (2.77), tj.

$$\delta = \max\{WM, WM(b-a)^{\frac{1}{q}}\}. \quad (2.82)$$

Sada možemo primijeniti Teorem 2.3.1 na funkciju u pa dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 2.3.4. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $\alpha > \frac{1}{q}$. Nadalje, neka je v ograničena na $[a,b]$ i $I = [0,\delta]$, gdje je δ definirana s (2.82). Neka je $\phi : [0,\beta] \to \mathbb{R}$ takva da je $\phi(0) = 0$ i $\phi \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0,\delta^q]$. Tada postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\begin{aligned}\Psi_\phi(J^\alpha_{a+}v, v) &= \frac{\xi\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}} \\ &\cdot \left[\frac{(b-a)^{q\alpha}}{\Gamma^q(\alpha)\left[p(\alpha - \frac{1}{q})\right]^{\frac{q}{p}}}\int_a^b |v(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |J^\alpha_{a+}v(x)|^q|v(x)|^q dx\right], \quad (2.83)\end{aligned}$$

gdje je $J^\alpha_{a+}v$ lijevi Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral funkcije v reda α, definiran s (2.12).

Teorem 2.3.5. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha > \frac{1}{q}$. Neka je funkcija v ograničena na $[a,b]$ i $I = [0,\delta]$, gdje je δ definirana s (2.82). Nadalje, neka su $\phi_1 \circ e_{\frac{1}{q}}, \phi_2 \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0,\delta^q]$. Tada postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}(J^\alpha_{a+}v, v)}{\Psi_{\phi_2}(J^\alpha_{a+}v, v)} = \frac{\xi\,\phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\,\phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a $J^\alpha_{a+}v$ lijevi Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral funkcije v reda α, definiran s (2.12).

Analogni rezultati onima iz Teorema 2.3.4 i 2.3.5, iskazani bez dokaza, slijede za desne Riemann-Liouvilleove razlomljene integrale.

Teorem 2.3.6. *Neka su ispunjene pretpostavke Teorema 2.3.4. Tada postoji $\xi \in I$ takav da je*

$$\begin{aligned}\Psi_\phi(J^\alpha_{b-}v, v) &= \frac{\xi\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}} \\ &\cdot \left[\frac{(b-a)^{q\alpha}}{\Gamma^q(\alpha)\left[p(\alpha - \frac{1}{q})\right]^{\frac{q}{p}}} \int_a^b |v(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |J^\alpha_{b-}v(x)|^q|v(x)|^q dx \right],\end{aligned}$$

gdje je $J^\alpha_{b-}v$ desni Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral funkcije v reda α, definiran s (2.13).

Teorem 2.3.7. *Neka su ispunjene pretpostavke Teorema 2.3.5. Tada postoji $\xi \in I$ takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}(J^\alpha_{b-}v, v)}{\Psi_{\phi_2}(J^\alpha_{b-}v, v)} = \frac{\xi\,\phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\,\phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula a $J^\alpha_{b-}v$ desni Riemann-Liouvilleov razlomljeni integral funkcije v reda α, definiran s (2.13).

Sada slijede Teoremi 2.3.1 i 2.3.2 iskazani za Caputove razlomljene derivacije.
Neka su $p, q > 1$, $\alpha > \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nadalje, neka su $K(x,t)$, funkcije u, v, Q te M kao u dokazu Teorema 2.2.15. Neka je funkcija $v^{(n)}$ ograničena na $[a,b]$, tj vrijedi $|v^{(n)}(x)| \leq W$. Tada vrijedi $\left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$ i $I = [0, \delta_{cap}]$, gdje je δ_{cap} definirana s

$$\delta_{cap} = \max\{WM, WM(b-a)^{\frac{1}{q}}\}. \tag{2.84}$$

Sada možemo primijeniti Teorem 2.3.1 na funkciju u pa dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 2.3.8. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $n - \alpha > \frac{1}{q}$. Nadalje, neka je $v \in AC^n[a,b]$ i $I = [0, \delta_{cap}]$, gdje je δ_{cap} definirana s* (2.84)*. Neka je $\phi : I \to \mathbb{R}$ takva da je $\phi(0) = 0$ i $\phi \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0, \delta^q_{cap}]$. Tada postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\begin{aligned}\Psi_\phi({}^C D^\alpha_{a+}v, v^{(n)}) &= \frac{\xi\,\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}} \\ &\cdot \left[\frac{(b-a)^{q(n-\alpha)}}{\Gamma^q(n-\alpha)\left[p\left(n - \alpha - \frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}} \int_a^b |v^{(n)}(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |{}^C D^\alpha_{a+}v(x)|^q|v^{(n)}(x)|^q dx \right],\end{aligned} \tag{2.85}$$

gdje je ${}^C D^\alpha_{a+}v$ Caputova lijeva razlomljena derivacija reda α funkcije v, definirana s (2.17).

Teorem 2.3.9. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $n - \alpha > \frac{1}{q}$. Neka je funkcija $v \in AC^n[a, b]$ i $I = [0, \delta_{cap}]$, gdje je δ_{cap} definirana s (2.84). Nadalje, neka su $\phi_1 \circ e_{\frac{1}{q}}, \phi_2 \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0, \delta_{cap}^q]$. Tada postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}({}^C D_{a+}^{\alpha} v, v^{(n)})}{\Psi_{\phi_2}({}^C D_{a+}^{\alpha} v, v^{(n)})} = \frac{\xi \phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi \phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a ${}^C D_{a+}^{\alpha} v$ Caputova lijeva razlomljena derivacija reda α funkcije v, definirana s (2.17).

Slijede iskazi posljednja dva teorema za Caputove desne razlomljene derivacije.

Teorem 2.3.10. *Neka vrijede pretpostavke teorema 2.3.8. Tada postoji $\xi \in I$ takav da je*

$$\begin{aligned} \Psi_{\phi}({}^C D_{b-}^{\alpha} v, v^{(n)}) &= \frac{\xi\, \phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}} \\ &\cdot \left[\frac{(b-a)^{q(n-\alpha)}}{\Gamma^q(n-\alpha) \left[p\left(n - \alpha - \frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}} \int_a^b |v^{(n)}(x)|^{2q} dx - 2 \int_a^b |{}^C D_{b-}^{\alpha} v(x)|^q |v^{(n)}(x)|^q dx \right], \end{aligned} \tag{2.86}$$

gdje je ${}^C D_{b-}^{\alpha} v$ Caputova desna razlomljena derivacija reda α funkcije v, definirana s (2.18).

Teorem 2.3.11. *Neka vrijede pretpostavke teorema 2.3.9. Tada postoji $\xi \in I$ takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}({}^C D_{b-}^{\alpha} v, v^{(n)})}{\Psi_{\phi_2}({}^C D_{b-}^{\alpha} v, v^{(n)})} = \frac{\xi \phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi \phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a ${}^C D_{b-}^{\alpha} v$ Caputova desna razlomljena derivacija reda α funkcije v, definirana s (2.18).

Sada slijede proširenja za koja treba kompozicijski identitet za lijeve Caputove razlomljene derivacije dan Teoremom 2.1.15.
Neka su $p, q > 1$, $\alpha > \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nadalje, neka su $K(x, t)$, funkcije u, v, R te M kao u dokazu Teorema 2.2.19. Neka je funkcija ${}^C D_{a+}^{\beta} v$ ograničena na $[a, b]$, tj. vrijedi $|{}^C D_{a+}^{\beta} v| \leq W$. Tada vrijedi $\left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$ i $I = [0, \delta_{cap1}]$, gdje je δ_{cap1} definirana s

$$\delta_{cap1} = \max\{WM, WM(b-a)^{\frac{1}{q}}\}. \tag{2.87}$$

Sada možemo primijeniti Teorem 2.3.1 na funkciju u pa dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 2.3.12. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \geq 0$, m i n dani sa (2.16), za redom β i α. Nadalje, neka je $v \in AC^n[a, b]$ i $I = [0, \delta_{cap1}]$, gdje je δ_{cap1} definirana s (2.87). Neka je $v \in AC^m[a, b]$ takva da je $v^{(i)}(a) = 0$ za $i = n, n+1, ..., m-1$,*

${}^{C}D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$ *i* ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}v \in L_1[a,b]$. *Nadalje, neka je* $\phi : I \to \mathbb{R}$ *takva da je* $\phi(0) = 0$ *i* $\phi \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0, \delta^q_{cap}]$. *Tada postoji* $\xi \in I$, *takav da je*

$$\Psi_\phi({}^{C}D^{\beta}_{a+}v, {}^{C}D^{\alpha}_{a+}v) = \frac{\xi\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}$$
$$\left[\frac{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}{\Gamma^q(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}}\int_a^b |{}^{C}D^{\alpha}_{a+}v(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |{}^{C}D^{\beta}_{a+}v(x)|^q|{}^{C}D^{\alpha}_{a+}v(x)|^q dx\right], \tag{2.88}$$

gdje su ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}v$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v$ *Caputove lijeve razlomljene derivacija reda* α, *odnosno* β *funkcije* v, *definirane s* (2.17).

Teorem 2.3.13. *Neka su* $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \geq 0$, m *i* n *dani sa* (2.16), *za redom* β *i* α. *Nadalje, neka je* $v \in AC^n[a,b]$ *i* $I = [0, \delta_{cap1}]$, *gdje je* δ_{cap1} *definirana s* (2.87). *Neka je* $v \in AC^m[a,b]$ *takva da je* $v^{(i)}(a) = 0$ *za* $i = n, n+1, ..., m-1$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$ *i* ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}v \in L_1[a,b]$. *Nadalje, neka su* $\phi_1 \circ e_{\frac{1}{q}}, \phi_2 \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0, \delta^q_{cap1}]$. *Tada postoji* $\xi \in I$, *takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}({}^{C}D^{\beta}_{a+}v, {}^{C}D^{\alpha}_{a+}v)}{\Psi_{\phi_2}({}^{C}D^{\beta}_{a+}v, {}^{C}D^{\alpha}_{a+}v)} = \frac{\xi\phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}v$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v$ *su Caputove lijeve razlomljene derivacija reda* α, *odnosno* β *funkcije* v, *definirane s* (2.17).

Korištenjem Teorema 2.3.1, 2.3.2 i kompozicijskog identiteta za desne Caputove razlomljene derivacije danog Teoremom 2.1.16, može se dati sličan rezultat za desne Caputove razlomljene derivacije.

Teorem 2.3.14. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3.12. Tada postoji* $\xi \in I$ *takav da je*

$$\Psi_\phi({}^{C}D^{\beta}_{b-}v, {}^{C}D^{\alpha}_{b-}v) = \frac{\xi\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}$$
$$\left[\frac{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}{\Gamma^q(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}}\int_a^b |{}^{C}D^{\alpha}_{b-}v(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |{}^{C}D^{\beta}_{b-}v(x)|^q|{}^{C}D^{\alpha}_{b-}v(x)|^q dx\right], \tag{2.89}$$

gdje su ${}^{C}D^{\alpha}_{b-}v$, ${}^{C}D^{\beta}_{b-}v$ *Caputove desne razlomljene derivacija reda* α, *odnosno* β *funkcije* v, *definirane s* (2.18).

Teorem 2.3.15. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3.13. Tada postoji* $\xi \in I$ *takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}({}^{C}D^{\beta}_{b-}v, {}^{C}D^{\alpha}_{b-}v)}{\Psi_{\phi_2}({}^{C}D^{\beta}_{b-}v, {}^{C}D^{\alpha}_{b-}v)} = \frac{\xi\phi_1''(\xi) - (q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\phi_2''(\xi) - (q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a ${}^{C}D^{\alpha}_{b-}v$, ${}^{C}D^{\beta}_{b-}v$ *su Caputove desne razlomljene derivacija reda* α, *odnosno* β *funkcije* v, *definirane s* (2.18).

Rezultati dani za Caputove razlomljene derivacije mogu se analogno dati za druga dva tipa razlomljenih derivacija koje promatramo, tj. za one Canavatijevog i Riemann-Liouvilleovog tipa. Još ćemo, kao primjer dati jednakosti analogne (2.88), dobivene sa kompozicijskim identitetom za lijeve razlomljene derivacije. Dokazi su izostavljeni.
Kompozicijski identitet za lijeve Canavatijeve razlomljene derivacije dan je Teoremom 2.1.17.
Neka su $p, q > 1$, $\alpha > \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Nadalje, za $x \in [a, b]$ neka je

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-t)^{\beta-\alpha-1}, & a \le t \le x\,, \\ 0, & x < t \le b\,, \end{cases}$$

$$u(x) = {}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\beta-\alpha-1}\, {}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(t)\, dt\,,$$

$$S(x) = \left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{(x-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Za $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$ funkcija S je rastuća na $[a, b]$, dakle

$$\max_{x\in[a,b]} S(x) = \frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} = M\,.$$

Neka je funkcija ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v$ ograničena na $[a, b]$, tj. vrijedi $|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v| \le W$. Tada vrijedi $\left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le M$, $I = [0, \delta_{can}]$, gdje je δ_{can} definirana s

$$\delta_{can} = \max\{WM, WM(b-a)^{\frac{1}{q}}\}. \tag{2.90}$$

Sada možemo primijeniti Teorem 2.3.1 na funkciju u pa dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 2.3.16. *Neka su $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\alpha \ge 0$, $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$, $m = [\beta] + 1$ i $n = [\alpha] + 1$. Nadalje, neka je $v \in AC^n[a, b]$ i $I = [0, \delta_{can}]$, gdje je δ_{can} definirana s (2.90). Neka je $v \in C^{\beta}_{\alpha+}[a, b]$ takva da je $v^{(i)}(a) = 0$ za $i = n-1, n, ..., m-2$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a, b]$. Nadalje, neka je $\phi : I \to \mathbb{R}$ takva da je $\phi(0) = 0$ i $\phi \circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0, \delta^q_{can}]$. Tada postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\Psi_\phi({}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v, {}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v) \;=\; \frac{\xi\phi''(\xi) - (q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}$$
$$\left[\frac{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}{\Gamma^q(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}} \int_a^b |{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)|^{2q} dx - 2\int_a^b |{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v(x)|^q |{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v(x)|^q dx\right],$$

gdje su ${}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v$ lijeve Canavatijeve razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.29).

Teorem 2.3.17. *Neka su $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha\geq 0$, $\beta-\alpha>\frac{1}{q}$, $m=[\beta]+1$ i $n=[\alpha]+1$. Nadalje, neka je $v\in AC^n[a,b]$ i $I=[0,\delta_{can}]$, gdje je δ_{can} definirana s* (2.90)*. Neka je $v\in C^{\beta}_{\alpha+}[a,b]$ takva da je $v^{(i)}(a)=0$ za $i=n-1,n,...,m-2$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v\in L_q[a,b]$. Nadalje, neka su $\phi_1\circ e_{\frac{1}{q}},\phi_2\circ e_{\frac{1}{q}}\in C^2[0,\delta^q_{cap1}]$. Tada postoji $\xi\in I$, takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}({}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v,{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v)}{\Psi_{\phi_2}({}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v,{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v)}=\frac{\xi\phi_1''(\xi)-(q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\phi_2''(\xi)-(q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a ${}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{a+}v$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{a+}v$ su lijeve Canavatijeve razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.29).

Kompozicijski identitet za desne Canavatijeve razlomljene derivacije dan je Teoremom 2.1.18.

Teorem 2.3.18. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3.16. Tada postoji $\xi\in I$, takav da vrijedi jednakost*

$$\Psi_{\phi}({}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v,{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v) = \frac{\xi\phi''(\xi)-(q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}$$
$$\left[\frac{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}{\Gamma^q(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}}\int_a^b|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)|^{2q}dx-2\int_a^b|{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v(x)|^q|{}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v(x)|^q dx\right],$$

gdje su ${}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v$ Canavatijeve desne razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.30).

Teorem 2.3.19. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3.17. Tada postoji $\xi\in I$, takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}({}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v,{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v)}{\Psi_{\phi_2}({}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v,{}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v)}=\frac{\xi\phi_1''(\xi)-(q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\phi_2''(\xi)-(q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su nazivnici različiti od nula, a ${}^{\bar{C}}D^{\alpha}_{b-}v$, ${}^{\bar{C}}D^{\beta}_{b-}v$ su desne Canavatijeve razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.30).

Kompozicijski identitet za lijeve Riemann-Liouvilleove razlomljene derivacije dan je Teoremom 2.1.13.
Neka su $p,q>1$, $\beta-\alpha>\frac{1}{q}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Nadalje, za $x\in[a,b]$ neka je

$$K(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-t)^{\beta-\alpha-1}, & a\leq t\leq x\,,\\ 0, & x<t\leq b\,,\end{cases}$$

$$u(x)=D^{\alpha}_{a+}v(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_a^x(x-t)^{\beta-\alpha-1}\,{}^{C}D^{\beta}_{a+}v(t)\,dt\,,$$

$$T(x)=\left(\int_a^x(K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{(x-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{1}{p}}}\,.$$

Za $\beta - \alpha > \frac{1}{q}$ funkcija T je rastuća na $[a,b]$, dakle

$$\max_{x\in[a,b]} T(x) = \frac{(b-a)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}}}{\Gamma(\beta-\alpha)\, p^{\frac{1}{p}} \left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{p}}} = M\,.$$

Neka je funkcija $D^{\beta}_{a+}v$ ograničena na $[a,b]$, tj. vrijedi $|D^{\beta}_{a+}v| \leq W$. Tada vrijedi $\left(\int_a^x (K(x,t))^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$ i $I=[0,\delta_{rl}]$, gdje je δ_{rl} definirana s

$$\delta_{rl} = \max\{WM, WM(b-a)^{\frac{1}{q}}\}. \tag{2.91}$$

Teorem 2.3.20. *Neka su $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha \geq 0$, $\beta-\alpha > \frac{1}{q}$, $m=[\beta]+1$ i $n=[\alpha]+1$. Nadalje, neka je $v \in AC^n[a,b]$ i $I=[0,\delta_{rl}]$, gdje je δ_{rl} definirana s (2.91). Neka je $v \in C^{\beta}_{\alpha+}[a,b]$ takva da je $v^{(i)}(a)=0$ za $i=n-1,n,...,m-2$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$. Nadalje, neka je $\phi: I \to \mathbb{R}$ takva da je $\phi(0)=0$ i $\phi\circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0,\delta^q_{rl}]$. Ako vrijedi jedan od uvjeta $(i)-(vii)$ iz Teorema 2.1.13 za β,α,v i $D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$, onda postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\Psi_{\phi}(D^{\beta}_{a+}v, D^{\alpha}_{a+}v) = \frac{\xi\phi''(\xi)-(q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}$$
$$\left[\frac{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}{\Gamma^q(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}}\int_a^b |D^{\beta}_{a+}v(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |D^{\alpha}_{a+}v(x)|^q |D^{\beta}_{a+}v(x)|^q dx\right],$$

gdje su $D^{\alpha}_{a+}v$, $D^{\beta}_{a+}v$ lijeve Riemann-Liouvilleove razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.14).

Teorem 2.3.21. *Neka su $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha \geq 0$, $\beta-\alpha > \frac{1}{q}$, $m=[\beta]+1$ i $n=[\alpha]+1$. Nadalje, neka je $v \in AC^n[a,b]$ i $I=[0,\delta_{rl}]$, gdje je δ_{rl} definirana s (2.91). Neka je $v \in C^{\beta}_{\alpha+}[a,b]$ takva da je $v^{(i)}(a)=0$ za $i=n-1,n,...,m-2$, ${}^{C}D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$. Nadalje, neka su $\phi_1\circ e_{\frac{1}{q}}, \phi_2\circ e_{\frac{1}{q}} \in C^2[0,\delta^q_{rl}]$. Ako vrijedi jedan od uvjeta $(i)-(vii)$ iz Teorema 2.1.13 za β,α,v i $D^{\beta}_{a+}v \in L_q[a,b]$, onda postoji $\xi \in I$, takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}(D^{\beta}_{a+}v, D^{\alpha}_{a+}v)}{\Psi_{\phi_2}(D^{\beta}_{a+}v, D^{\alpha}_{a+}v)} = \frac{\xi\phi_1''(\xi)-(q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\phi_2''(\xi)-(q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su $D^{\alpha}_{a+}v$, $D^{\beta}_{a+}v$ lijeve Riemann–Liouvilleove razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.14).

Kompozicijski identitet za desne Riemann–Liouvilleove razlomljene derivacije dan je Teoremom 2.1.14.

Teorem 2.3.22. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3.20. Ako vrijedi jedan od uvjeta $(i)-(vii)$ iz Teorema 2.1.14 za β,α,v i $D^{\beta}_{b-}v \in L_q[a,b]$, onda postoji $\xi \in I$*

takav da je

$$\Psi_\phi(D_{b-}^\beta v, D_{b-}^\alpha v) \;=\; \frac{\xi\phi''(\xi)-(q-1)\phi'(\xi)}{2q\xi^{2q-1}}$$
$$\left[\frac{(b-a)^{q(\beta-\alpha)}}{\Gamma^q(\beta-\alpha)\left[p\left(\beta-\alpha-\frac{1}{q}\right)\right]^{\frac{q}{p}}}\int_a^b |D_{b-}^\beta v(x)|^{2q}dx - 2\int_a^b |D_{b-}^\alpha v(x)|^q |D_{b-}^\beta v(x)|^q dx\right],$$

gdje su $D_{b-}^\alpha v$, $D_{b-}^\beta v$ Riemann-Liouvilleove desne razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.15).

Teorem 2.3.23. *Neka vrijede pretpostavke Teorema 2.3.20. Ako vrijedi jedan od uvjeta (i) − (vii) iz Teorema 2.1.14 za β, α, v i $D_{b-}^\beta v \in L_q[a,b]$, onda postoji $\xi \in I$ takav da je*

$$\frac{\Psi_{\phi_1}(D_{b-}^\beta v, D_{b-}^\alpha v)}{\Psi_{\phi_2}(D_{b-}^\beta v, D_{b-}^\alpha v)} = \frac{\xi\phi_1''(\xi)-(q-1)\phi_1'(\xi)}{\xi\phi_2''(\xi)-(q-1)\phi_2'(\xi)},$$

gdje su $D_{b-}^\alpha v$, $D_{b-}^\beta v$ desne Riemann–Liouvilleove razlomljene derivacije reda α, odnosno β definirane s (2.15).

Teorem 2.3.24. *Neka je J interval u $\mathbb{R}$ i $\Upsilon = \{\phi_s : s \in J\}$ familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; F_{\phi_s}]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$, gdje je $F_{\phi_s}(y) = \phi_s(y^{\frac{1}{q}})$. Nadalje, neka je $\Psi_{\phi_s}(u,v)$ linearni funkcional definiran s* (2.76). *Tada je $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ n-eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je još funkcija $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ neprekidna na J, onda je n-eksponencijalno konveksna na J.*

Sljedeći korolar je direktna posljedica gornjeg teorema.

Korolar 2.3.25. *Neka je J interval u $\mathbb{R}$ i $\Upsilon = \{\phi_s : s \in J\}$ familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; F_{\phi_s}]$ eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$, gdje je $F_{\phi_s}(y) = \phi_s(y^{\frac{1}{q}})$. Nadalje, neka je $\Psi_{\phi_s}(u,v)$ linearni funkcional definiran s* (2.76). *Tada je $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu na J. Ako je još funkcija $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ neprekidna na J, onda je eksponencijalno konveksna na J.*

Definirajmo

$$\mu_{s,p}(\Psi,\Omega) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Psi_{\phi_s}(u,v)}{\Phi_{\phi_p}(u,v)}\right)^{\frac{1}{s-p}}, & s \neq p, \\ \exp\left(\dfrac{\frac{d}{ds}\Psi_{\phi_s}(u,v)}{\Psi_{\phi_s}(u,v)}\right), & s = p. \end{cases} \tag{2.92}$$

Teorem 2.3.26. *Neka je J interval u $\mathbb{R}$ i $\Omega = \{\phi_s : s \in J\}$ familija funkcija definiranih na intervalu I u $\mathbb{R}$, takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; F_{\phi_s}]$ 2-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu na J za svake tri međusobno različite točke $y_0, y_1, y_2 \in I$, gdje je $F_{\phi_s}(y) = \phi_s(y^{\frac{1}{q}})$. Nadalje, neka je $\Psi_{\phi_s}(u,v)$ linearni funkcional definiran s (2.76). Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) *Ako je funkcija $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ neprekidna na J, onda je 2-eksponencijalno konveksna funkcija na J. Ako je funkcija $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ dodatno pozitivna, onda je također log-konveksna na J. Tada za $r, s, t \in J$ takve da je $r < s < t$ vrijedi*
$$\left(\Psi_{\phi_s}(u,v)\right)^{t-r} \leq \left(\Psi_{\phi_r}(u,v)\right)^{t-s} \left(\Psi_{\phi_t}(u,v)\right)^{s-r}. \tag{2.93}$$

(ii) *Ako je funkcija $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u,v)$ pozitivna i diferencijabilna na J, onda za svaki izbor $s, p, r, t \in J$, takve da je $s \leq r$ i $p \leq t$, vrijedi*
$$\mu_{s,p}(\Psi, \Omega) \leq \mu_{r,t}(\Psi, \Omega). \tag{2.94}$$

Napomena 2.3.27. Rezultati iz Teorema 2.3.24, Korolara 2.3.25 i Teorema 2.3.26 vrijede i kad su dvije točke od tri točke $y_0, y_1, y_2 \in I$ koincidentne, za familiju diferencijabilnih funkcija ϕ_s takvih da je funkcija $s \mapsto [y_0, y_1, y_2; F_{\phi_s}]$ n-eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu (eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, *log*-konveksna u Jensenovom smislu). Nadalje, još uvijek vrijedi kad su sve tri točke koincidentne za familiju dva puta diferencijabilnih funkcija sa istim svojstvom. Dokazi se mogu dobiti primjenom Napomene 1.2.12 i odgovarajuće karakterizacije konveksnosti.

Sada ćemo koristiti teoreme srednje vrijednosti 2.3.1 i 2.3.2 za sredine Stolarskyjevog tipa i funkcional $\Psi_\phi(u,v)$ definiran s (2.76). Nekoliko familija funkcija, koje ćemo dati, ispunjava uvjete Teorema 1.2.21, Korolara 1.2.22 i Teorema 1.2.23 (i Napomene 1.2.24) te nam omogućavaju da metodom opisanom u 1.2.2. konstruiramo veliku familiju funkcija koje su eksponencijalno konveksne.

Primjer 2.3.28. Promatramo familiju funkcija
$$\Omega_1 = \{\phi_s : [0,\infty) \to \mathbb{R} : s > 0\}$$
definiranu za $q > 1$ sa
$$\phi_s(x) = \begin{cases} \dfrac{q^2}{s(s-q)} x^s, & s \neq q, \\ q\, x^q \log x, & s = q. \end{cases}$$

Vrijedi $\dfrac{d^2(\phi_s)}{dx^2}(x^{\frac{1}{q}}) = x^{\frac{s-2q}{q}} = e^{\frac{s-2q}{q}\ln x} > 0$, što znači da je ϕ_s konveksna funkcija u odnosu na funkciju $g(x) = x^q$ za svaki $x > 0$ te $s \mapsto \dfrac{d^2(\phi_s)}{dx^2}(x^{\frac{1}{q}})$ je eksponencijalno konveksna po definiciji. Uočimo da je $\phi_s(0) = 0$, uz $0 \log 0 = 0$.
Korištenjem sličnih tvrdnji kao u dokazu Teorema 2.3.24 zaključimo da je

$s \mapsto [y_0, y_1, y_2; F_{\phi_s}]$ eksponencijalno konveksna funkcija pa ujedno i eksponencijalno konveksna u Jensenovom smislu, gdje je $F_{\phi_s}(y) = \phi_s(y^{\frac{1}{q}})$. Iz Korolara 2.3.25 imamo da je $s \mapsto \Psi_{\phi_s}(u, v)$ eksponencijalno konveksna funkcija u Jensenovom smislu. Lako se vidi da su ove funkcije neprekidne, pa su eksponencijalno konveksne.
Dakle, imamo

$$\Psi_{\phi_s}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{q^3\,(b-a)^{\frac{s}{q}-1}\,M^{s-q}}{s(s-q)} \displaystyle\int_a^b |v(x)|^s\,dx - \dfrac{q^2}{s-q}\displaystyle\int_a^b |u(x)|^{s-q}\,|v(x)|^q\,dx\,, \\ s \neq q\,, \\ q^2 \displaystyle\int_a^b |v(x)|^q \log\left[(b-a)^{\frac{1}{q}}\,M|v(x)|\right]\,dx - q\displaystyle\int_a^b |v(x)|^q\,[q\log|u(x)|+1]\,dx\,, \\ s = q\,. \end{cases}$$

Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,t}(\Psi, \Omega_1)$ iz (2.92) postaje

$$\mu_{s,t}(\Psi,\Omega_1) = \begin{cases} \left(\dfrac{\Psi_{\phi_s}(u,v)}{\Psi_{\phi_t}(u,v)}\right)^{\frac{1}{s-t}}, & s \neq t, \\ \exp\left(\dfrac{q-2s}{s(s-q)} + \dfrac{\Psi_{\phi_s\cdot\log}(u,v)}{\Psi_{\phi_s}(u,v)}\right), & s = t \neq q, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{q} + \dfrac{\Psi_{\phi_q\cdot\log}(u,v)}{2\Psi_{\phi_q}(u,v)}\right), & s = t = q, \end{cases}$$

i po (2.94) je monotona u parameterima s i t.
Za funkcional $\Psi_\phi(u, v)$ imamo

$$\mu_{s,t}(\Psi,\Omega_1) = \begin{cases} \left(\dfrac{qt(t-q)(b-a)^{\frac{s}{q}-1}M^{s-q}\int_a^b |v(x)|^s\,dx - s\int_a^b |u(x)|^{s-q}|v(x)|^q\,dx}{qs(s-q)(b-a)^{\frac{t}{q}-1}M^{t-q}\int_a^b |v(x)|^t\,dx - t\int_a^b |u(x)|^{t-q}|v(x)|^q\,dx}\right)^{\frac{1}{s-t}}, s \neq t\,, \\ \exp\Bigg(\dfrac{q-2s}{s(s-q)} \\ +\dfrac{q(b-a)^{\frac{s}{q}-1}M^{s-q}\int_a^b |v(x)|^s \log\left[(b-a)^{\frac{1}{q}}M|v(x)|\right]dx - \int_a^b [s\log|u(x)|+1]|u(x)|^{s-q}|v(x)|^q\,dx}{q(b-a)^{\frac{s}{q}-1}M^{s-q}\int_a^b |v(x)|^s\,dx - s\int_a^b |u(x)|^{s-q}|v(x)|^q\,dx}\Bigg), \\ s = t \neq q\,, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{q} + \dfrac{q\int_a^b |v(x)|^q \log^2\left[(b-a)^{\frac{1}{q}}M|v(x)|\right]dx - \int_a^b [q\log|u(x)|+2]|v(x)|^q \log|u(x)|\,dx}{2q\int_a^b |v(x)|^q \log\left[(b-a)^{\frac{1}{q}}M|v(x)|\right]dx - 2\int_a^b [q\log|u(x)|+1]|v(x)|^q\,dx}\right), \\ s = t = q\,. \end{cases}$$

Primjer 2.3.29. Promatramo familiju funkcija

$$\Omega_2 = \{\varphi_s : [0, \infty) \to \mathbb{R} : s \in \mathbb{R}\}$$

definiranu za $q > 1$ sa

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{sx^q} - 1}{s^2}, & s \neq 0\,, \\ \dfrac{x^{2q}}{2}\,, & s = 0\,. \end{cases}$$

Budući da je $\dfrac{d^2\,(\phi_s)}{dx^2}(x^{\frac{1}{q}}) = e^{sx} > 0$, funkcija φ_s je konveksna u odnosu na funkciju $g(x) = x^q$ za $x > 0$ i $s \mapsto \dfrac{d^2\,(\phi_s)}{dx^2}(x^{\frac{1}{q}})$ je eksponencijalno konveksna po definiciji. Primijetimo da je $\varphi_s(0) = 0$. Slično kao u Primjeru 2.3.28 zaključimo da je funkcija $s \mapsto \Phi_{\varphi_s}(u,v)$ eksponencijalno konveksna.
Imamo

$$\Psi_{\varphi_s}(u,v) \;=\; \begin{cases} \dfrac{q}{s^2 M^q(b-a)} \displaystyle\int_a^b \{\exp[s(b-a)M^q|v(x)|^q] - 1\}\,dx & \\ -\dfrac{q}{s}\displaystyle\int_a^b |v(x)|^q \exp[s|u(x)|^q]dx\,, & s \neq 0\,, \\ \dfrac{q(b-a)M^q}{2}\displaystyle\int_a^b |v(x)|^{2q}dx - q\int_a^b |u(x)|^q v(x)|^q\,dx\,, & s = 0\,. \end{cases}$$

Za ovu familiju funkcija, $\mu_{s,t}(\Phi,\Omega_2)$ iz (2.92) postaje

$$\mu_{s,t}(\Psi,\Omega_2) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{\Psi_{\varphi_s}(u,v)}{\Psi_{\varphi_t}(u,v)}\right)^{\frac{1}{s-t}}, & s \neq t, \\ \exp\left(-\dfrac{2}{s} + \dfrac{\Psi_{x^q\cdot\varphi_s}(u,v)}{\Psi_{\varphi_s}(u,v)}\right), & s = t \neq 0\,, \\ \exp\left(\dfrac{\Psi_{x^q\cdot\varphi_0}(u,v)}{3\Psi_{\varphi_0}(u,v)}\right), & s = t = 0\,, \end{cases}$$

i po (2.94) je monotona u parametrima s i t. Za funkcional $\Psi_\varphi(u,v)$ računamo

$$\mu_{s,t}(\Psi,\Omega_2) = \begin{cases} \left(\frac{s^{-2}\int_a^b\{\exp[s(b-a)M^q|v(x)|^q]-1\}dx - s^{-1}M^q(b-a)\int_a^b \exp(s|u(x)|^q)|v(x)|^q\,dx}{t^{-2}\int_a^b\{\exp[t(b-a)M^q|v(x)|^q]-1\}dx - t^{-1}M^q(b-a)\int_a^b \exp(t|u(x)|^q)|v(x)|^q\,dx}\right)^{\frac{1}{s-t}}, \\ s \neq t\,, \\ \exp\left(-\frac{2}{s} + \frac{\int_a^b\{\exp[s(b-a)M^q|v(x)|^q] - \exp[s\,|u(x)|^q] - s|u(x)|^q\,\exp[s|u(x)|^q]\}|v(x)|^q\,dx}{\frac{1}{M^q(b-a)}\int_a^b\{\exp[s(b-a)M^q|v(x)|^q]-1\}dx - s\int_a^b \exp(s|u(x)|^q)|v(x)|^q dx}\right), \\ s = t \neq 0\,, \\ \exp\left(\frac{(b-a)^2M^{2q}\int_a^b|v(x)|^{3q}dx - 3\int_a^b|u(x)|^{2q}|v(x)|^q dx}{3(b-a)M^q\int_a^b|v(x)|^{2q}dx - 6\int_a^b|u(x)|^q|v(x)|^q dx}\right), \\ s = t = 0\,. \end{cases}$$

Poglavlje 3.

Opći oblik nejednakosti Opialova tipa

Cilj ovog poglavlja je dati opću nejednakost Opialova tipa na prostoru mjere (Ω, Σ, μ). Dobivene integralne nejednakosti su Opialova tipa jer sadrže izmjerivu funkciju i njenu integralnu reprezentaciju. Primijenit ćemo dobivene rezultate na neke simetrične funkcije i dobiti nove rezultate koji uključuju Greenovu funkciju, Lidstonove redove i Hermiteov interpolacijski teorem. Većina rezultata iz ovog poglavlja objavljena je u radovima [14] i [15].
Motivacija nam je rezultat K. Krulić, J. Pečarić, L.-E. Persson iz [28] (vidjeti i [29, Poglavlje II, p. 15]) kojim su dali opću nejednakost Hardyjeva tipa. Autori su proučavali prostore mjere $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ i $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ te opći integralni operator A_k definiran s

$$A_k f(x) = \frac{1}{K(x)} \int_{\Omega_2} k(x,y) f(y)\, d\mu_2(y), \quad x \in \Omega_1,$$

gdje je $f : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija, $k : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ opća izmjeriva i nenegativna funkcija, tj. jezgra te

$$K(x) = \int_{\Omega_2} k(x,y)\, d\mu_2(y) > 0, \quad K(x) < \infty, x \in \Omega_1.$$

Koristeći Jensenovu integralnu nejednakost (1.7) i Fubinijev teorem (vidjeti npr. [27]), dokazali su težinsku nejednakost

$$\int_{\Omega_1} u(x) \Phi(A_k f(x))\, d\mu_1(x) \leq \int_{\Omega_2} v(y) \Phi(f(y))\, d\mu_2(y), \tag{3.1}$$

gdje je Φ konveksna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ takva da je $f(y) \in I$, za svaki $y \in \Omega_2$, $u : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ nenegativna izmjeriva funkcija, $x \mapsto u(x)\frac{k(x,y)}{K(x)}$ integrabilna na Ω_1 za svaki fiksni $y \in \Omega_2$, v definirana na Ω_2 sa

$$v(y) = \int_{\Omega_1} u(x) \frac{k(x,y)}{K(x)}\, d\mu_1(x) < \infty.$$

Posebno, nejednakost (3.1) objedinjuje i poopćava većinu rezultata ovog tipa (uključujući klasične rezultate Hardya, Hilberta i Godunove).

3.1. Rezultati s težinskom fukcijom

Neka je (Ω, Σ, μ) prostor mjere, $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ simetrična, nenegativna ili nepozitivna funkcija takva da je $|K(x)| < \infty$, gdje je

$$K(x) = \int_\Omega k(x,y)d\mu(y), \ K(x) \neq 0, \quad \text{s.s.}\, x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Pretpostavit ćemo da su svi integrali koje koristimo dobro definirani.

Teorem 3.1.1. *Neka je $k : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ simetrična, nenegativna ili nepozitivna funkcija, f pozitivna, konveksna funkcija, g pozitivna, konkavna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $v : \Omega \to \mathbb{R}$ nenegativna ili nepozitivna funkcija, takva da je $Im|v| \subseteq I$ i težinska funkcija u definirana sa*

$$u(x) = \int_\Omega k(x,y)v(y)d\mu(y) < \infty, \tag{3.3}$$

onda vrijedi

$$\int_\Omega |K(x)| f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \leq \int_\Omega |K(x)| f(|v(x)|) g\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right) d\mu(x) \tag{3.4}$$

gdje je funkcija K definirana s (3.2).

Dokaz. Budući da je $\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|$ poopćena sredina i $|v(y)| \in I$ za svaki $y \in \Omega$, slijedi da je $\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right| \in I$ za svaki $x \in \Omega$.
Koristeći Jensenovu integralnu nejednakost (1.7) i Fubinijev teorem (vidjeti npr. [27]) računamo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |K(x)| f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |K(x)| f\left(\frac{|\int_\Omega k(x,y)v(y)d\mu(y)|}{|K(x)|}\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |K(x)| f\left(\frac{\int_\Omega |k(x,y)v(y)|d\mu(y)}{|K(x)|}\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&\leq \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)| f(|v(y)|)d\mu(y)\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega f(|v(y)|) \left(\int_\Omega |k(x,y)| g(|v(x)|)d\mu(x)\right) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Obzirom da je k simetrična funkcija vrijedi $|k(x,y)| = |k(y,x)|$ te ponovnom primjenom Jensenove integralne nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega f(|v(y)|)\left(\int_\Omega |k(y,x)|g(|v(x)|)d\mu(x)\right)d\mu(y)\\
&\leq \int_\Omega f(|v(y)|)|K(y)|g\left(\frac{1}{|K(y)|}\int_\Omega |k(y,x)v(x)|d\mu(x)\right)d\mu(y)\\
&= \int_\Omega f(|v(y)|)|K(y)|g\left(\frac{|u(y)|}{|K(y)|}\right)d\mu(y). \qquad \square
\end{aligned}$$

Napomena 3.1.2. Ako uzmemo da je $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, nejednakost (3.1) postaje

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega u(x)\Phi\left(\frac{1}{K(x)}\int_\Omega k(x,y)f(y)d\mu(y)\right)d\mu(x)\\
&\quad\leq \int_\Omega \Phi(f(y))\left(\int_\Omega u(x)\frac{k(x,y)}{K(x)}d\mu(x)\right)d\mu(y). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Ako primjenimo Teorem 3.1.1 za funkciju $g(x) = 1$, nejednakost (3.4) se reducira na

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |K(x)|f\left(\frac{1}{|K(x)|}\int_\Omega |k(x,y)v(y)|d\mu(y)\right)d\mu(x)\\
&\quad\leq \int_\Omega f(|v(y)|)\left(\int_\Omega |k(x,y)|d\mu(x)\right)d\mu(y). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Sada vidimo da su nejednakosti (3.4) i (3.6) ekvivalentne.

Sada ćemo dati primjene Teorema 3.1.1, za posebne simetrične funkcije.
Greenova funkcija G definirana je na $[a,b]\times[a,b]$ sa

$$G(s,t) = \begin{cases} \frac{(s-b)(t-a)}{b-a}, & a \leq t \leq s\,; \\ \frac{(s-a)(t-b)}{b-a}, & s \leq t \leq b. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Funkcija G je simetrična, nepozitivna, konveksna po s i t te neprekidna funkcija po s i t.
Lako se vidi da za svaku funkciju $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \varphi \in C^2[a,b]$,vrijedi

$$\varphi(x) = \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) + \frac{x-a}{b-a}\varphi(b) + \int_a^b G(x,t)\varphi''(t)dt,$$

gdje je funkcija G definirana kao u (3.7).

Korolar 3.1.3. *Neka je f pozitivna, konveksna funkcija i g pozitivna, konkavna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (b-x)(x-a)f\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right)g(|\varphi''(x)|)dx\\
&\leq \int_a^b (b-x)(x-a)f(|\varphi''(x)|)g\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right)dx, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

za sve funkcije $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \varphi \in C^2[a,b]$.

Dokaz. Budući da je funkcija G definirana sa (3.7) nepozitivna, simetrična funkcija, možemo primijeniti Teorem 3.1.1, uz $\Omega = [a,b]$, $k(x,y) = G(x,y)$, $v(y) = \varphi''(y)$. Vrijedi

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)\varphi''(y)dy = \varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b),$$

$$|K(x)| = \int_a^b |G(x,y)|dy = \frac{(b-x)(x-a)}{2}$$

i nejednakost (3.4) postaje

$$\int_a^b (b-x)(x-a) f\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right) g(|\varphi''(x)|)dx$$
$$\leq \int_a^b (b-x)(x-a) f(|\varphi''(x)|) g\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right) dx.$$

□

Napomena 3.1.4. Ako je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, onda nejednakost (3.8) postaje

$$\int_a^b (b-x)(x-a) f\left(\frac{2|\varphi(x)|}{(b-x)(x-a)}\right) g(|\varphi''(x)|)dx$$
$$\leq \int_a^b (b-x)(x-a) f(|\varphi''(x)|) g\left(\frac{2|\varphi(x)|}{(b-x)(x-a)}\right) dx.$$

Lidstoneov red je poopćenje Taylorovog reda. Aproksimira danu funkciju u okolini dviju točaka. Takve redove proučavali su G. J. Lidstone (1929), H. Poritsky (1932), J. M. Wittaker (1934) i ostali.

Definicija 3.1.5. *Neka je $\varphi \in C^\infty[0,1]$. Kažemo da je*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\varphi^{(2k)}(0)\Lambda_k(1-x) + \varphi^{(2k)}(1)\Lambda_k(x)\right),$$

Lidstoneov red, gdje je Λ_n polinom stupnja $2n+1$ definiran relacijama

$$\begin{aligned} &\Lambda_0(t) = t, \\ &\Lambda_n''(t) = \Lambda_{n-1}(t), \\ &\Lambda_n(0) = \Lambda_n(1) = 0, \qquad n \geq 1. \end{aligned}$$

Još nekoliko eksplicitnih prikaza Lidstoneovih polinoma dano je u [3] i [40] s

$$\Lambda_n(t) \;=\; (-1)^n \frac{2}{\pi^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n+1}} \sin k\pi t, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_n(t) &= \frac{1}{6}\left[\frac{6t^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}\right] \\
&- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2(2^{2k+3}-1)}{(2k+4)!} B_{2k+4} \frac{t^{2n-2k-3}}{(2n-2k-3)!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\
\Lambda_n(t) &= \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} B_{2n+1}\left(\frac{1+t}{2}\right), \quad n = 1, 2 \ldots,
\end{aligned}$$

gdje je B_{2k+4} $(2k+4)$-ti Bernoullijev broj, a $B_{2n+1}\left(\frac{1+t}{2}\right)$ Bernoullijev polinom. Widder je u [41], dokazao sljedeću fundamentalnu lemu.

Lema 3.1.6. *Ako je $\varphi \in C^{(2n)}[0,1]$, onda vrijedi*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\varphi^{(2k)}(0)\Lambda_k(1-t) + \varphi^{(2k)}(1)\Lambda_k(t)\right] + \int_0^1 G_n(s,t)\varphi^{(2n)}(t)dt,$$

gdje je

$$G_1(s,t) = G(s,t) = \begin{cases} (s-1)t, & \text{za } t \leq s, \\ (t-1)s, & \text{inače,} \end{cases}$$

homogena Greenova funkcija diferencijalnog operatora $\frac{d^2}{dt^2}$ na $[0,1]$, s uzastopnim iteracijama funkcije $G(s,t)$

$$G_n(s,t) = \int_0^1 G_1(s,p)\, G_{n-1}(p,t)dp, \quad n \geq 2.$$

Lidstoneovi polinomi se mogu prikazati preko $G_n(s,t)$

$$\Lambda_n(s) = \int_0^1 G_n(s,t)t\, dt.$$

Eulerovi polinomi su definirani funkcijom

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(t)\frac{x^n}{n!} = \frac{t-1}{t-\exp((t-1)x)}.$$

Mogu se izračunati iz rekurzije

$$\begin{aligned}
E_0(t) &= 1, \\
E_n(t) &= t(1-t)E'_{n-1}(t) + E_{n-1}(t)(1+(n-1)t), \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Više detalja o Eulerovim polinomima može se naći u [22].
Primjetimo da je $G_n(s,t)$ simetrična funkcija pa možemo za nju iskazati sljedeći korolar, kao posebni slučaj Teorema 3.1.1.

Korolar 3.1.7. *Neka je $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{(2n)}[a,b]$, $n \geq 1$. Nadalje, neka je f pozitivna, konveksna funkcija te g pozitivna, konkavna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.*

Tada vrijedi

$$\int_a^b E_{2n}(x) f\left(\frac{|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+\varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right)$$
$$\times\, g(|\varphi^{(2n)}(x)|)d(x)$$
$$\leq \int_a^b E_{2n}(x) g\left(\frac{|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+\varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right)$$
$$\times\, f(|\varphi^{(2n)}(x)|)d(x) \tag{3.9}$$

gdje je E_{2n} Eulerov polinom.

Dokaz. Po Widderovoj lemi 3.1.6, svaku funkciju $\varphi \in C^{(2n)}[a,b]$ možemo prikazati u obliku:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+\varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\\ &+ (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right)\varphi^{(2n)}(y)dy.\end{aligned}$$

Računamo

$$\begin{aligned}&\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+\varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\\ &= (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right)\varphi^{(2n)}(y)dy.\end{aligned}$$

Sada primjenimo Teorem 3.1.1 sa $k(x,y)=(b-a)^{2n-1}G_n\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right)$, $v(y)=\varphi^{(2n)}(y)$. Slijedi

$$K(x)=(b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right)dy = E_{2n}(x),\ E_{2n} \text{ je Eulerov polinom}$$

$$\begin{aligned}u(x) &= (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a},\frac{y-a}{b-a}\right)\varphi^{(2n)}(y)dy\\ &= \varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right)+\varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\end{aligned}$$

i nejednakost (3.4) postaje (3.9) i dokaz je gotov.

□

Napomena 3.1.8. Ako je $\varphi^{(2k)}(a)=\varphi^{(2k)}(b)=0$, onda (3.9) postaje

$$\int_a^b E_{2n}(x) f\left(\frac{|\varphi(x)|}{E_{2n}(x)}\right) g(|\varphi^{(2n)}(x)|)dx \leq \int_a^b E_{2n}(x) f(|\varphi^{(2n)}(x)|) g\left(\frac{|\varphi(x)|}{E_{2n}(x)}\right)dx.$$

Sada ćemo dati Hermiteov interpolacijski polinom za Taylorove uvjete u dvije točke. Za detalje vidjeti [3].

Lema 3.1.9. *Neka je* $\varphi \in C^n[a,b]$, $(n \geq 2,\ n = 2r)$. *Tada vrijedi*

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1-i} \binom{r+k-1}{k} \left(\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x) + \varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)\right) + \int_a^b \varphi^{(n)}(t) G_{2T}(x,t)dt,$$

gdje su τ_i *i* ν_i *definirani na* $[a,b]$ *s*

$$\begin{aligned}\tau_i(x) &= \frac{(x-a)^i}{i!}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^r \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k,\\ \nu_i(x) &= \frac{(x-b)^i}{i!}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^r \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^k\end{aligned}$$

i G_{2T} *je Greenova funkcija za Taylorov problem u dvije točke definirana s*

$$G_{2T}(s,t) = \begin{cases} \frac{(-1)^r}{(2r-1)!} p^r(s,t) \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1+j}{j} (s-t)^{r-1-j} q^j(s,t), & t \leq s \\ \frac{(-1)^r}{(2r-1)!} q^r(s,t) \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1+j}{j} (t-s)^{r-1-j} p^j(s,t), & t > s \end{cases}$$

i

$$p(s,t) = \frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, \quad q(s,t) = p(t,s), \qquad s,t \in [a,b].$$

Sada ćemo dati poseban slučaj Teorema 3.1.1 za Hermiteov interpolacijski polinom za Taylorove uvjete u dvije točke.

Korolar 3.1.10. *Neka je* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{(2r)}[a,b]$. *Nadalje, neka je* f *pozitivna, konveksna funkcija i* g *pozitivna, konkavna funkcija na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}&\int_a^b (x-a)^r (b-x)^r g(|\varphi^{(2r)}(x)|)\\ &\qquad \times f\left(\frac{(2r)!|\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1-i}\binom{r+k-1}{k}[\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x) + \varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)]|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)dx\\ &\leq \int_a^b (x-a)^r (b-x)^r f(|\varphi^{(2r)}(x)|)\\ &\qquad \times g\left(\frac{(2r)!|\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1-i}\binom{r+k-1}{k}[\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x) + \varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)]|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Dokaz. Budući da je $G_{2T}(s,t)$ simetrična funkcija imamo

$$\begin{aligned}&\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{r-1-i} \binom{r+k-1}{k} \left(\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x) + \varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)\right)\\ &= \int_a^b \varphi^{(2r)}(s) G_{2T}(x,t)dt.\end{aligned}$$

Sada primjenimo Teorem 3.1.1 sa $k(x,y)=G_{2T}(x,t)$ i $v(y)=\varphi^{(2r)}(t)$. Dobijemo

$$\begin{aligned}
|K(x)| &= \int_a^b |G_{2T}(x,t)|dt = \frac{1}{(2r)!}|(x-a)^r(x-b)^r| = \frac{1}{(2r)!}(x-a)^r(b-x)^r,\\
u(x) &= \int_a^b G_{2T}(x,t)\varphi^{(2r)}(t)dt\\
&= \varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1-i}\binom{r+k-1}{k}\cdot[\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x)+\varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)]
\end{aligned}$$

i nejednakost (3.4) postaje (3.10) te je dokaz gotov.

□

Napomena 3.1.11. Ako je $\varphi^{(i)}(a)=\varphi^{(i)}(b)=0$, onda nejednakost (3.10) postaje

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (x-a)^r(b-x)^r f\left(\frac{(2r)!|\varphi(x)|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right) g(|\varphi^{(2r)}(x)|)dx\\
&\leq \int_a^b (x-a)^r(b-x)^r g\left(\frac{(2r)!|\varphi(x)|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right) f(|\varphi^{(2r)}(x)|)dx.
\end{aligned}$$

Teorem 3.1.12. *Neka je $0<q<1$, $k:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ simetrična, nenegativna ili nepozitivna funkcija, $S:\Omega\to\mathbb{R}_+$. Nadalje, neka je f pozitivna, konveksna funkcija na intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$, funkcija $v:\Omega\to\mathbb{R}$ nenegativna ili nepozitivna, takva da je $Im|v|\subseteq I$ i u definirana sa* (3.3)*. Tada vrijedi*

$$\int_\Omega S(x) f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right)|v(x)|^q dx \leq \int_\Omega R(x) f(|v(x)|)|u(x)|^q dx \tag{3.11}$$

gdje je K definirana s (3.2) *a*

$$R(y) = \left[\int_\Omega \left(\frac{S(x)}{|K(x)|}\right)^{\frac{1}{1-q}} |k(x,y)|dx\right]^{1-q}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega S(x) f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right)|v(x)|^q dx &= \int_\Omega S(x) f\left(\left|\frac{\int_\Omega k(x,y)v(y)dy}{K(x)}\right|\right)|v(x)|^q dx\\
&\leq \int_\Omega S(x)\frac{|v(x)|^q}{|K(x)|}\left(\int_\Omega |k(x,y)| f(|v(y)|)dy\right)dx\\
&= \int_\Omega f(|v(y)|)\left(\int_\Omega \frac{S(x)}{|K(x)|}|k(x,y)||v(x)|^q dx\right)dy\\
&= \int_\Omega f(|v(y)|)\left(\int_\Omega \frac{S(x)}{|K(x)|}|k(x,y)|^{1-q}|k(x,y)v(x)|^q dx\right)dy
\end{aligned}$$

Sada primjenom Hölderove nejednakosti (vidjeti npr. [36]) dobijemo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega S(x) f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right)|v(x)|^q dx\\
&\leq \int_\Omega f(|v(y)|)\left[\int_\Omega \left(\frac{S(x)}{|K(x)|}|k(x,y)|^{1-q}\right)^{\frac{1}{1-q}} dx\right]^{1-q} \times \left[\int_\Omega |k(x,y)v(x)|dx\right]^q dy
\end{aligned}$$

Budući da je k simetrična funkcija, vrijedi $k(x,y) = k(y,x)$ pa imamo

$$\left[\int_\Omega |k(x,y)v(x)|dx\right]^q = \left[\int_\Omega |k(y,x)v(x)|dx\right]^q = |u(y)|^q.$$

Po definiciji je

$$\left[\int_\Omega \left(\frac{S(x)}{|K(x)|}\right)^{\frac{1}{1-q}} |k(x,y)|dx\right]^{1-q} = R(y),$$

pa slijedi

$$\int_\Omega S(x) f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right) |v(x)|^q dx \leq \int_\Omega R(x) f(|v(x)|)|u(x)|^q dx.$$

□

Napomena 3.1.13. Primjetimo da ako je $S(x) = |K(x)|$, onda imamo

$$\int_\Omega |K(x)| f\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right) |v(x)|^q dx \leq \int_\Omega |K(x)|^{1-q} f(|v(x)|)|u(x)|^q dx$$

i to je poseban slučaj Teorema 3.1.1 za konkavnu funkciju $g(x) = x^q, 0 < q < 1$.

Sada ćemo dati poseban slučaj Teorema 3.1.12. Prvo promotrimo rezultat koji uključuje Greenovu funkciju G definiranu sa (3.7).

Korolar 3.1.14. *Neka je $0 < q < 1$, $S : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ i $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \varphi \in C^2[a,b]$. Ako je f pozitivna, konveksna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, onda vrijedi*

$$\begin{aligned} &\int_a^b S(x) f\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right) |\varphi''(x)|^q dx \\ &\leq \int_a^b R(x) f(|\varphi''(x)|) \left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right)^q dx, \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdje je

$$R(y) = \left[\int_a^b \left(\frac{2S(x)}{(b-x)(x-a)}\right)^{\frac{1}{1-q}} |G(x,y)|dx\right]^{1-q}.$$

Dokaz. Primjenimo Teorem 3.1.12 sa $\Omega = [a,b]$, $k(x,y) = G(x,y)$, $v(y) = \varphi''(y)$. Tada je

$$u(x) = \varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b), \quad |K(x)| = \int_a^b |G(x,y)|dy = \frac{(b-x)(x-a)}{2}$$

i nejednakost (3.11) postaje (3.12). □

Napomena 3.1.15. Ako je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, onda (3.12) postaje

$$\int_a^b S(x) f\Big(\frac{2|\varphi(x)|}{(b-x)(x-a)}\Big)|\varphi''(x)|^q dx \leq \int_a^b R(x) f(|\varphi''(x)|)\Big(\frac{2|\varphi(x)|}{(b-x)(x-a)}\Big)^q dx.$$

Sada ćemo dati rezultat za Lidstoneove polinome.

Korolar 3.1.16. *Neka je $0 < q < 1$, $S : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ i $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{(2n)}[a,b], n \geq 1$. Ako je f pozitivna, konveksna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, onda vrijedi*

$$\int_a^b S(x) f\left(\frac{|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right)$$

$$\times|\varphi^{(2n)}(x)|^q dx$$

$$\leq \int_a^b R(x)\left(\frac{|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right)^q$$

$$\times f(|\varphi^{(2n)}(x)|)dx, \tag{3.13}$$

gdje je

$$R(y) = \left[(b-a)^{2n-1}\int_a^b \left(\frac{S(x)}{E_{2n}(x)}\right)^{\frac{1}{1-q}} |G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)|dx\right]^{1-q}.$$

Dokaz. Primjenimo Teorem 3.1.12 sa $k(x,y) = (b-a)^{2n-1}G_n\left(\frac{x-a}{b-a}\frac{y-a}{b-a}\right)$, $v(y) = \varphi^{(2n)}(y)$, $n \geq 1$. Slijedi

$$K(x) = (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)dy = E_{2n}(x),\ E_{2n} \text{ je Eulerov polinom,}$$

$$u(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]$$

i nejednakost (3.11) postaje (3.13). □

Napomena 3.1.17. Ako je $\varphi^{(2k)}(a) = \varphi^{(2k)}(b) = 0$, onda (3.13) postaje

$$\int_a^b S(x) f\left(\frac{|\varphi(x)|}{E_{2n}(x)}\right)|\varphi^{(2n)}(x)|^q dx \leq \int_a^b R(x)\left(\frac{|\varphi(x)|}{E_{2n}(x)}\right)^q f(|\varphi^{(2n)}(x)|)dx.$$

Korolar 3.1.18. *Neka je $0 < q < 1$, $S : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ i $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \in C^{(2r)}[a,b]$. Ako je f pozitivna, konveksna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, onda vrijedi*

$$\int_a^b S(x) f\left(\frac{(2r)!|\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1-i}\binom{r+k-1}{k}[\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x) + \varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)]|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)$$

$$\times|\varphi^{(2r)}(x)|^q dx$$

$$\leq \int_a^b S(x)\left(\frac{(2r)!|\varphi(x)-\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1-i}\binom{r+k-1}{k}[\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x)+\varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)]|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)^q$$

$$\times f(|\varphi^{(2r)}(x)|)dx, \tag{3.14}$$

gdje je

$$R(y)=\left[\int_\Omega\left(\frac{(2r)!S(x)}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)^{\frac{1}{1-q}}|G_{2T}(x,y)|dx\right]^{1-q}.$$

Dokaz. Primjenom Teorema 3.1.12 sa $k(x,y)=G_{2T}(x,y)$, $v(y)=\varphi^{(2r)}(y)$, imamo

$$|K(x)|=\frac{1}{(2r)!}(x-a)^r(b-x)^r,$$

$$u(x)=\varphi(x)-\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{r-1-i}\binom{r+k-1}{k}\cdot[\varphi^{(i)}(a)\tau_i(x)+\varphi^{(i)}(b)\nu_i(x)]$$

i nejednakost (3.11) postaje (3.14). □

Napomena 3.1.19. Ako je $\varphi^{(i)}(a)=\varphi^{(i)}(b)=0$, onda (3.14) postaje

$$\int_a^b S(x)f\left(\frac{(2r)!|\varphi(x)|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)|\varphi^{(2r)}(x)|^q dx,$$

$$\leq \int_a^b S(x)\left(\frac{(2r)!|\varphi(x)|}{(x-a)^r(b-x)^r}\right)^q f(|\varphi^{(2r)}(x)|)dx.$$

3.2. Opća Opialova nejednakost za kvocijent funkcija

U ovom odjeljku ćemo dati poopćenje nejednakosti (3.4).

Teorem 3.2.1. *Neka je $k:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ simetrična, nenegativna ili nepozitivna funkcija i K definiran s* (3.2)*. Nadalje, neka je f pozitivna, konveksna funkcija, g pozitivna, konkavna funkcija na intervalu $I\subseteq\mathbb{R}$. Ako su funkcije $v,n:\Omega\to\mathbb{R}$ nenegativne ili nepozitivne, takve da je $Im|v|, Im|\frac{v}{n}|\subseteq I$, funkcija u definirana s* (3.3) *i m definiran s*

$$m(x):=\int_\Omega k(x,y)n(y)d\mu(y)<\infty, \tag{3.15}$$

onda vrijedi

$$\int_\Omega |m(x)|f\left(\left|\frac{u(x)}{m(x)}\right|\right)g(|v(x)|)d\mu(x)$$

$$\leq \int_\Omega |n(x)||K(x)|f\left(\left|\frac{v(x)}{n(x)}\right|\right)g\left(\left|\frac{u(x)}{K(x)}\right|\right)d\mu(x), \tag{3.16}$$

gdje je K definiran s (3.2).

Dokaz. Primjenom Jensenove integralne nejednakost (1.7) i Fubinijevog teorema (vidjeti npr. [27]) imamo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |m(x)| f\left(\left|\frac{u(x)}{m(x)}\right|\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |m(x)| f\left(\frac{|\int_\Omega k(x,y)v(y)d\mu(y)|}{|m(x)|}\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega |m(x)| f\left(\int_\Omega \frac{|k(x,y)n(y)|}{|m(x)|}\frac{|v(y)|}{|n(y)|}d\mu(y)\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&\le \int_\Omega \left(\int_\Omega |k(x,y)n(y)| f\left(\frac{|v(y)|}{|n(y)|}\right) d\mu(y)\right) g(|v(x)|)d\mu(x) \\
&= \int_\Omega f\left(\frac{|v(y)|}{|n(y)|}\right)|n(y)| \left(\int_\Omega |k(x,y)| g(|v(x)|)d\mu(x)\right) d\mu(y). \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Budući da je k simetrična funkcija vrijedi $|k(x,y)| = |k(y,x)|$ pa korištenjem Jensenove nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{|v(y)|}{|n(y)|}\right)|n(y)| \left(\int_\Omega |k(y,x)| g(|v(x)|)d\mu(x)\right) d\mu(y) \\
&\le \int_\Omega |n(y)| f\left(\frac{|v(y)|}{|n(y)|}\right)|K(y)| g\left(\frac{1}{|K(y)|}\int_\Omega |k(y,x)v(x)|d\mu(x)\right) d\mu(y) \\
&= \int_\Omega |n(y)| f\left(\frac{|v(y)|}{|n(y)|}\right)|K(y)| g\left(\frac{|u(y)|}{|K(y)|}\right) d\mu(y). \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Sada iz (3.17) i (3.18) slijedi (3.16).

□

Napomena 3.2.2. Ako je $n(y) = 1$, onda je $m(x) = K(x)$ pa nejednakost (3.16) postaje nejednakost (3.4) iz Teorema 3.1.1.

Sada ćemo dati primjenu za neke poznate simetrične funkcije i dobit nove rezultate koju uključuju Greenovu funkciju, Lidstoneove redove i Hermiteov interpolacijski polinom.

Korolar 3.2.3. *Neka je f pozitivna, konveksna funkcija i g pozitivna, konkavna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b)\right| f\left(\frac{|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{|h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b)|}\right) g(|\varphi''(x)|)dx \\
&\le \frac{1}{2}\int_a^b |h''(x)|(b-x)(x-a) f\left(\frac{|\varphi''(x)|}{|h''(x)|}\right) g\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)}\right) dx \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

za sve funkcije $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}, \varphi \in C^2([a,b])$ takve da je φ'' nenegativna ili nepozitivna funkcija i $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ takva da je h'' nenegativna ili nepozitivna funkcija.

Dokaz. Budući da je funkcija G definirana s (3.7) nepozitivna, simetrična funkcija možemo primjeniti Teorem 3.2.1 uz $\Omega = [a,b]$, $k(x,y) = G(x,y)$, $v(y) = \varphi''(y)$, $n(x) = h''(x)$. Nadalje je

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)\varphi''(y)dy = \varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b),$$

$$|K(x)| = \int_a^b |G(x,y)|dy = \frac{(b-x)(x-a)}{2},$$

$$m(x) = \int_a^b G(x,y)h''(y)dy = h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b)$$

i nejednakost (3.16) postaje

$$\int_a^b \left| h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b) \right| f\left(\frac{|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{|h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b)|} \right) g(|\varphi''(x)|)dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b |h''(x)|(b-x)(x-a) f\left(\frac{|\varphi''(x)|}{|h''(x)|}\right) g\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)} \right) dx.$$

□

Napomena 3.2.4. Ako je $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, onda nejednakost (3.19) postaje

$$\int_a^b \left| h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b) \right| f\left(\frac{|\varphi(x)|}{|h(x) - \frac{b-x}{b-a}h(a) - \frac{x-a}{b-a}h(b)|} \right) g(|\varphi''(x)|)dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_a^b |h''(x)|(b-x)(x-a) f\left(\frac{|\varphi''(x)|}{|h''(x)|}\right) g\left(\frac{2|\varphi(x)|}{(b-x)(x-a)} \right) dx$$

Napomena 3.2.5. Ako je $h''(x) = 1$, onda je $m(x) = K(x)$ i nejednakost (3.19) se reducira na nejednakost (3.8)

$$\int_a^b (b-x)(x-a) f\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)} \right) g(|\varphi''(x)|)dx$$
$$\leq \int_a^b (b-x)(x-a) f(|\varphi''(x)|) g\left(\frac{2|\varphi(x) - \frac{b-x}{b-a}\varphi(a) - \frac{x-a}{b-a}\varphi(b)|}{(b-x)(x-a)} \right) dx$$

Korolar 3.2.6. *Neka je $\varphi \in C^{(2n)}[a,b]$, $n \geq 1$ takva da je $\varphi^{(2n)}$ nenegativna ili nepozitivna funkcija $h \in C^{(2n)}[a,b]$, $n \geq 1$ takva da je $h^{(2n)}$ nenegativna ili nepozitivna funkcija. Nadalje, neka je f pozitivna, konveksna funkcija i g pozitivna,* *konkavna funkcija na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left| h(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^{2k} \left[h^{(2k)}(a)\Lambda_k \left(\frac{b-x}{b-a}\right) + h^{(2k)}(b)\Lambda_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right] \right| \times g(|\varphi^{(2n)}(x)|) \\
&\quad \times f\left(\frac{|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{|h(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[h^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + h^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}\right) dx \\
&\le \int_a^b E_{2n}(x)|h^{(2n)}(x)| f\left(\left|\frac{\varphi^{(2n)}(x)}{h^{(2n)}(x)}\right|\right) \\
&\quad \times g\left(\frac{|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right) dx,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

gdje je E_{2n} Eulerov polinom.

Dokaz. Primjenimo Widderovu lemu 3.1.6 na funkciju $\varphi \in C^{(2n)}[a,b]$ pa dobijemo njen prikaz

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right] \\
&\qquad = (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)\varphi^{(2n)}(y)dy,
\end{aligned}$$

Sada primjenimo Teorem 3.2.1 sa $k(x,y) = (b-a)^{2n-1}G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)$, $v(y) = \varphi^{(2n)}(y)$. Računamo

$$K(x) = (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)dy = E_{2n}(x),\ E_{2n}\text{ je Eulerov polinom}$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)\varphi^{(2n)}(y)dy \\
&= \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right] \\
m(x) &= (b-a)^{2n-1}\int_a^b G_n\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{y-a}{b-a}\right)h^{(2n)}(y)dy
\end{aligned}$$

$$= m(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[m^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + m^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right].$$

Sada iz nejednakosti (3.16) slijedi nejednakost (3.20).

□

Napomena 3.2.7. Ako je $\varphi^{(2k)}(a) = \varphi^{(2k)}(b) = 0$, onda se nejednakost (3.20) reducira na nejednakost

$$\int_a^b \left| h(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^{2k} \left[h^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + h^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]\right|$$
$$\times f\left(\frac{|\varphi(x|}{|h(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[h^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + h^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}\right) g(|\varphi^{(2n)}(x)|)dx$$
$$\leq \int_a^b E_{2n}(x)|h^{(2n)}(x)| g\left(\frac{|\varphi(x)|}{E_{2n}(x)}\right) f\left(\left|\frac{\varphi^{(2n)}(x)}{h^{(2n)}(x)}\right|\right) dx.$$

Napomena 3.2.8. Ako je $n(x) = 1$, onda je $m(x) = K(x)$ i nejednakost (3.20) postaje nejednakost (3.10)

$$\int_a^b E_{2n}(x) f\left(\frac{|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right)$$
$$\times g(|\varphi^{(2n)}(x)|)dx$$
$$\leq \int_a^b E_{2n}(x) g\left(\frac{|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^{2k}\left[\varphi^{(2k)}(a)\Lambda_k\left(\frac{b-x}{b-a}\right) + \varphi^{(2k)}(b)\Lambda_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]|}{E_{2n}(x)}\right)$$
$$\times f(|\varphi^{(2n)}(x)|)dx.$$

Literatura

[1] R. P. Agarwal, P. Y. H. Pang, *On an Opial type inequality due to Fink*, J. Math. Anal. Appl. **196** (2) (1995), 748–753.

[2] R. P. Agarwal, P. Y. H. Pang, *Opial Inequalities with Applications in Differential and Difference Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1995

[3] R. P. Agarwal, P. J. Y. Wong, *Error Inequalities in Polynomial Interpolation and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1993.

[4] R. P. Agarwal, P. Y. H. Pang, *Opial-type inequalities involving high order derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), 85–103.

[5] M. Andrić, A. Barbir, G. Farid, J. Pečarić, *More on certain Opial-type inequality for fractional derivatives and exponentially convex functions*, Nonlinear functional analysis and applications. **19** (4) (2014), 563–583.

[6] M. Andrić, A. Barbir, J. Pečarić, *On Willett's, Godunova-Levin's and Rozanova's Opial-type inequalities with related Stolarsky type means*, Mathematical notes **96** (6) (2014), 841–852.

[7] M. Andrić, A. Barbir, G. Farid, J. Pečarić, *Opial-type inequality due to Agarwal-Pang and fractional differential inequalities*, Integral transforms and special functions, **25** (4) (2014), 324–335.

[8] M. Andrić, A. Barbir, J. Pečarić, G. Roqia, *Generalizations of Opial-type inequalities in several independent variables*, Demonstratio mathematica, **47** (4) (2014), 839–847.

[9] M. Andrić, A. Barbir, S. Iqbal, J. Pečarić, *An Opial-type integral inequality and exponentially convex functions*, Fractional Differential Calculus, **5** (1) (2015), 25–42.

[10] M. Andrić, J. E. Pečarić, I. Perić, *A multiple Opial type inequality for Riemann-Liouville fractional derivatives*, J. Math. Inequal, **7** (1) (2013), 139–150.

[11] M. Andrić, J. E. Pečarić, I. Perić, *Composition identities rule for the Caputo fractional derivatives and applications to Opial-type inequalities*, Math. Inequal. Appl., **16** (3) (2013), 657–670.

[12] M. Andrić, J. E. Pečarić, I. Perić, *Improvements of composition rule for the Canavati fractional derivatives and applications to Opial-type inequalities*, Dynam. Systems. App., **20** (2011), 383–394.

[13] M. Anwar, J. Jakšetić, J. Pečarić, Atiq ur Rehman, *Exponential convexity, positive semi-definite matrices and fundamental inequalities*, J. Math. Inequal. **4** (2) (2010), 171–189.

[14] A. Barbir, K. Krulić Himmelreich, J. Pečarić, *General Opial type inequality*, Aequationes mathematicae, **89** (3) (2015), 641–655.

[15] A. Barbir, K. Krulić Himmelreich, J. Pečarić, *General Opial type inequality for quotient of functions*, Sarajevo journal of mathematics, (prihvaćen za objavljivanje).

[16] P. R. Beesack, *On an integral inequality of Z. Opial*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 470–475.

[17] N. S. Bernstein, *Sur la definition et les properties des functions analytiques d'une variable reelle*, Math. Ann, **75** (1914), 449–468.

[18] I. Brnetić, J. Pečarić, *Note on generalization of Godunova-Levin-Opial inequality*, Demonstratio Math., **3** (30) (1997), 545–549.

[19] I. Brnetić, J. Pečarić, *Note on the generalization of the Godunova-Levin-Opial type inequality in several independent variables,* J. Math. Anal. Appl., **215** (1997), 274–283.

[20] J. A. Canavati, *The Riemann-Liouville integral*, Nieuw Archief Voor Wiskunde **5** (1) (1987), 53–75.

[21] E. K. Godunova, V. I. Levin, *On an inequality of Maroni*, Mat. Zametki **2** (1967), 221–224.

[22] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

[23] G. Farid, J. Pečarić, *Opial type integral inequalities for fractional derivatives*, Fractional Differ. Calc. **2** (1) (2012), 31–54.

[24] G. Farid, J. Pečarić, *Opial type integral inequalities for fractional derivatives II*, Fractional Differ. Calc. **2** (2) (2012), 139–155.

[25] J. Jakšetić, J. Pečarić, *Exponential Convexity Method*, J. Convex Anal. **20** (1) (2013), 181–197.

[26] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 2006.

[27] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, R.A. Silverman, *Introductory Real Analysis*, Dover Publication, New York, 1975.

[28] K. Krulić, J. Pečarić, L.-E. Persson, *Some new Hardy type inequalities with general kernels*, Math. Inequal. Appl. **12** (3) (2009), 473–485.

[29] K. Krulić Himmelreich, J. Pečarić, D. Pokaz, *Inequalities of Hardy and Jensen*, Element, Zagreb, 2013.

[30] S. Mardešić, *Matematička analiza u n–dimenzionalnom realnom prostoru, I i II*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[31] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*, Springer–Verlag, Berlin and New York, 1970.

[32] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, *Generalizations of two inequalities of Godunova and Levin*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **36** (1988), 645–648.

[33] C. Olech, *A simple proof of a certain result of Z. Opial*, Ann. Polon. Math, **8** (1960), 61–63.

[34] Z. Opial, *Sur une inégalité*, Ann. Polon. Math. **8** (1960), 29–32.

[35] J. Pečarić, J. Perić, *Improvements of the Giaccardi and Petrović inequality and related Stolarsky type means*, An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. **39** (1) (2012), 65–75.

[36] J. E. Pečarić, F. Proschan , Y.C. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, Inc., New York, 1992.

[37] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[38] G. I. Rozanova, *Integral'nye neravenstva s proizvodnysi i proizvol'nymi vypuklymi funkcijami*, Uc. Zap. Mosk. Gos. Ped. In-ta im. Lenina, **460** (1972), 58–65.

[39] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, Reading, 1993.

[40] J. M. Whittaker, *On Lidstone series and two-point expansions of analytic functions*, Proc. Lond. Math. Soc., **36** (1933-1934), 451–469.

[41] D.V. Widder, *Completly convex function and Lidstone series*, Trans. Amer. Math. Soc., 51 (1942), 387–398.

[42] D. V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, 1941.

[43] D. Willett, *The existence-uniqueness theorem for an n-th order linear ordinary differential equation*, Amer. Math. Monthly, **75** (1968), 174–178.

Sažetak

U disertaciji je promatrana Opialova nejednakost i njezina poopćenja i profinjenja, kratko rečeno, proučavane su nejednakosti Opialova tipa.

Prvo su dobivene nove nejednakosti Opialova tipa za konveksne funkcije koje su poopćenja i profinjenja Opialove, Wilettove, Godunova-Levinove i Rozanovine nejednakosti. Potom su dokazani rezultati i za više varijabli.
Također su dobivene nove nejednakosti Opialova tipa za konveksne i relativno konveksne funkcije usko povezane s Mitrinović-Pečarićevim rezultatima, primjenom kojih slijede nejednakosti za razlomljene derivacije Riemann-Liouvilleovog, Canavatijevog i Caputovog tipa, te za Riemann-Liouville razlomljene integrale. Dokazani su teoremi srednje vrijednosti za funkcionale pridružene novodobivenim nejednakostima. Dano je nekoliko familija funkcija koje omogućavaju konstrukcije familije eksponencijalno konveksnih funkcija, te sredine Stolarskyjevog tipa koje imaju svojstvo monotonosti.
Nadalje, razmatrana je opća nejednakost Opialova tipa za izmjerive funkcije te potom za kvocijent funkcija. Primjenom na razne simetrične funkcije dobiveni su novi rezultati vezani za Greenove funkcije, Lidstoneove redove i Hermiteove interpolacijske polinome.

Ključne riječi: Opialova nejednakost, Jensenova nejednakost, nejednakosti Opialova tipa, Willettova nejednakost, nejednakost Godunove-Levina, nejednakost Rozanove, nejednakosti Opialova tipa za više varijabli, Mitrinović-Pečarićeva nejednakost, Cauchyjev teorem srednje vrijednosti, n-eksponencijalna konveksnost, eksponencijalna konveksnost, log-konveksnost, sredine Stolarskyjevog tipa, razlomljeni integral, razlomljena derivacija.

Summary

Generalizations and refinements of Opial type inequalities

This thesis deals with Opial inequality and its famous generalizations, extensions and refinements, i.e. with Opial-type inequalities.

First, new Opial-type inequalities for convex functions are presented, some of which are generalization and some are refinement of Opial's, Willett's, Godunova-Levin's and Rozanova's inequality. Then results for more variables are proven.
Moreover, new Opial-type inequalites are obtained for convex and relatively convex functions closelly connected to Mitrinović-Pečarić's results, and application of these results yields inequalities for fractional derivatives of the Riemann-Liouville, Canavati and Caputo type and for the Riemann-Liouville fractional integrals. Mean value results are proven for linear functionals constructed from the newly obtained inequalities. Several examples of families of functions are given which enable construction of families of exponentially convex function and monotonic Stolarsky-type means.
Further, general Opial-type inequalities for measurable functions and for the quotient of functions are obtained. Application to numerous symmetric functions gives results that involve Green's functions, Lidstone's series and Hermite's interpolating polynomials.

Key words: Opial's inequality, Jensen's inequality, Opial-type inequalities, Willett's inequality, Godunova-Levin's inequality, Rozanova's inequality, Opial-type inequalities in several variables, Mitrinović-Pečarić's inequality, Cauchy mean value theorems, exponential convexity, Stolarsky-type means, fractional integral, fractional derivative. –

Životopis

Ana Barbir (rođ. Gudelj) je rođena 25. ožujka 1984. u Splitu, gdje je 1998. godine završila osnovnu školu te maturirala 2002. godine u 3. gimnaziji. Diplomirala je 2007. godine na Fakultetu prirodoslovno-matematičkih znanosti i kineziologije Sveučilišta u Splitu i stekla stručno zvanje profesor matematike i informatike. Sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu upisala je 2008. godine.

Od siječnja 2007. godine neprekidno radi u Splitu, i to na radnom mjestu profesorice informatike u 3. gimnaziji, zatim od travnja 2008. godine na radnom mjestu učiteljice matematike i fizike u OŠ Jesenice (Dugi Rat) te naposljetku od studenog 2008. godine kao asistentica pri Katedri za geometriju Fakulteta građevinarstva, arhitekture i geodezije Sveučilišta u Splitu.

Članica je Seminara za nejednakosti i primjene, Hrvatskog matematičkog društva, Splitskog matematičkog družtva te Hrvatskog društva za geometriju i grafiku. Aktivno je sudjelovala na znanstvenoj međunarodnoj konferenciji *Mathematical Inequalities and Applications 2014., One thousand papers conference.*

Koautorica je sljedećih objavljenih znanstvenih radova:

- M. Andrić, A. Barbir, G. Farid, J. Pečarić, *Opial-type inequality due to Agarwal-Pang and fractional differential inequalities*, Integral transforms and special functions. **25** (4) (2014), 324–335.
- M. Andrić, A. Barbir, G. Farid, J. Pečarić, *More on certain Opial-type inequality for fractional derivatives and exponentially convex functions*, Nonlinear functional analysis and applications. **19** (4) (2014), 563–583.
- M. Andrić, A. Barbir, J. Pečarić, *On Willett's, Godunova-Levin's and Rozanova's Opial-type inequalities with related Stolarsky type means*, Mathematical notes **96** (6) (2014), 841–852.
- M. Andrić, A. Barbir, J. Pečarić, G. Roqia, *Generalizations of Opial-type inequalities in several independent variables*, Demonstratio mathematica, **47** (4) (2014), 839–847.
- M. Andrić, A. Barbir, S. Iqbal, J. Pečarić, *An Opial-type integral inequality and exponentially convex functions*, Fractional differential calculus, **5** (1) (2015),

25–42.

- A. Barbir, K. Krulić Himmelreich, J. Pečarić, *General Opial type inequality*, Aequationes mathematicae, **89** (3) (2015), 641–655.

- A. Barbir, K. Krulić Himmelreich, J. E. Pečarić, *Refinements of Jessen's functional*, Ukrains'kyi matematychnyi zhurnal **68** (7) (2016), 879–896.

Znanstveni rad

- A. Barbir, K. Krulić Himmelreich, J. Pečarić, *General Opial type inequality for quotient of functions*,

je prihvaćen za objavljivanje u časopisu Sarajevo journal of mathematics.